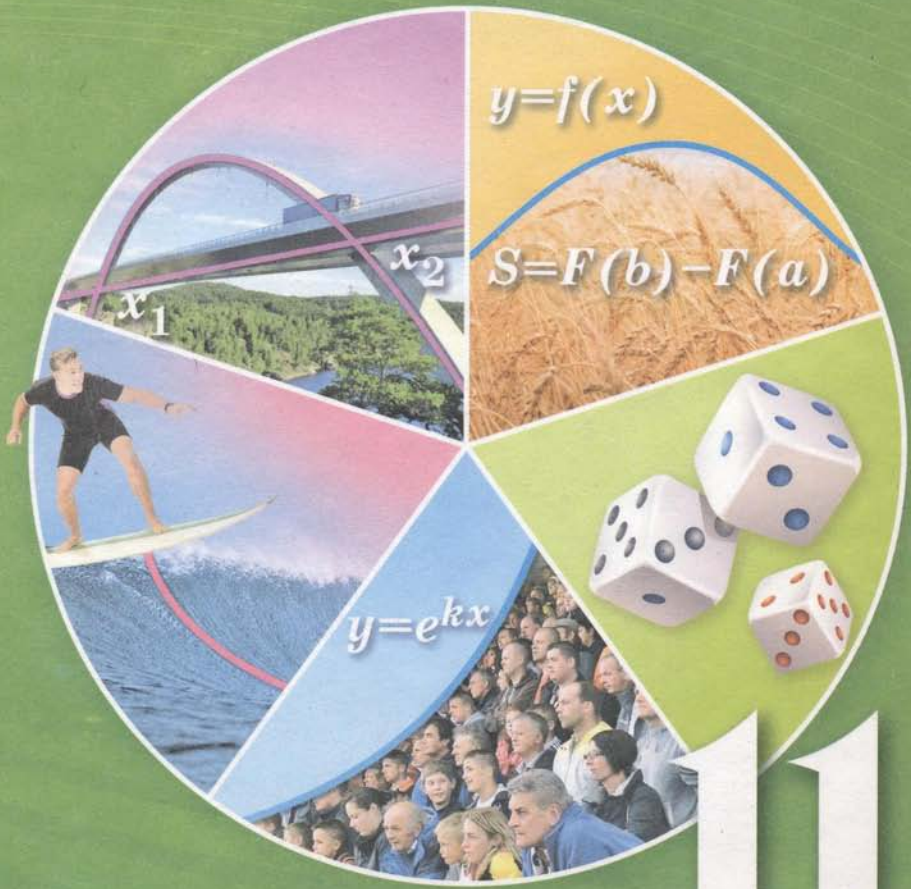
ВИДАВНИЦТВО ОСВІТА

Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владимирова

АЛГЕБРА

(АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА)

Академический уровень
Профильный уровень



11

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Формулы сокращённого умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}).$$

Степени и корни

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$,

$(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$, $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Прогрессии

Арифметическая прогрессия: a_1, $a_1 + d$, $a_1 + 2d$, $a_1 + 3d$, ...

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Геометрическая прогрессия: b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, ...

$$b_n = b_1q^{n-1}, S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, S = \frac{b_1}{1 - q}, \text{ если } |q| < 1.$$

Логарифмы

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $a^{\log_a x} = x$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $\log_a x^p = p\log_a x$, $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$,

$\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$.

Решения уравнений

$ax + b = 0$, $x = -\frac{b}{a}$; $ax^2 + bx + c = 0$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$a^x = b$, $x = \log_a b$; $\log_a x = b$, $x = a^b$.

Тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \qquad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);$$

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}, \qquad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}, \qquad \operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

Тригонометрические уравнения

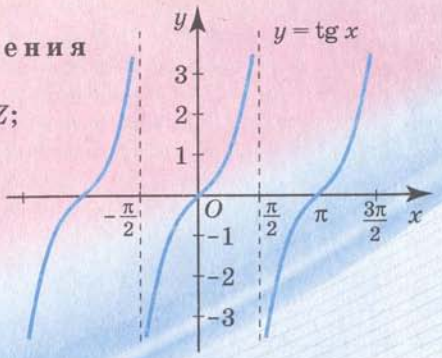
$\sin x=a$, $\quad x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in Z;$

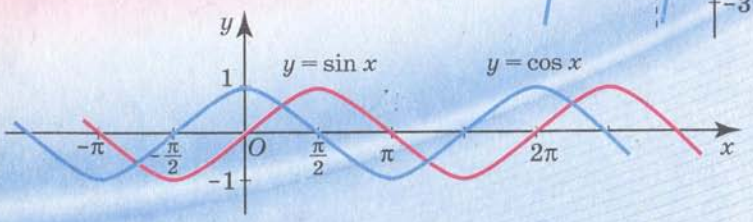
$\cos x=a$, $\quad x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{tg}x=a$, $\quad x=\operatorname{arctg}a+\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{ctg}x=a$, $\quad x=\operatorname{arcctg}a+\pi n,\ n\in Z.$

Графики функций





Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владимирова

АЛГЕБРА

(АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА)

Учебник для 11 класса
общеобразовательных учебных заведений
с русским языком обучения

Академический уровень,
профильный уровень

Рекомендовано Министерством образования
и науки Украины

КИЕВ
«ОСВІТА»
2011

ББК 22.1я721
Б36

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
(приказ от 16.03.2011 г. № 235)

ИЗДАНО ЗА СЧЁТ ГОСУДАРСТВЕННЫХ СРЕДСТВ. ПРОДАЖА ЗАПРЕЩЕНА

Переведено по изданию

Бевз Г. П. Алгебра (Алгебра і початки аналізу): підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К.: Освіта, 2011. — 400 с.

Научную экспертизу учебника проводил
Институт математики Национальной академии наук Украины

Психолого-педагогическую экспертизу учебника проводил
Институт педагогики Национальной академии педагогических наук Украины

Бевз Г. П.

Б36 Алгебра (Алгебра и начала анализа): учеб. для 11 кл. общеобразоват. учебн. завед.: академ. уровень, профил. уровень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владимирова. — К.: Освіта, 2011. — 400 с.

ISBN 978-966-04-0838-8 **ББК 22.1я721**

ISBN 978-966-04-0838-8 (рус.)
ISBN 978-966-04-0837-1 (укр.)

© Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н.Г. Владимирова, 2011
© Перевод. В. Г. Бевз, 2011
© Издательство «Освіта», художественное оформление, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1 ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

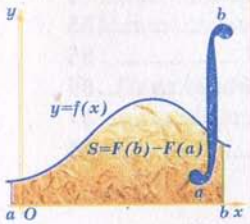
§ 1. Функции и их основные свойства 9
§ 2. Степени с действительными показателями 19
§ 3. Показательные функции 29
§ 4. Показательные уравнения и неравенства 38
§ 5. Логарифмы и их свойства 49
§ 6. Логарифмические функции 58
§ 7. Логарифмические уравнения и неравенства 67
§ 8. Показательные и логарифмические уравнения, неравенства и их системы с параметрами 78
Готовимся к тематическому контролю 85
Тестовые задания 85
Типовые задачи для контрольной работы 86
Исторические сведения 87
Главное в разделе 1 88

Раздел 2 ПРЕДЕЛ И НЕПРКРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 9. Предел последовательности 91
§ 10. Предел и непрерывность функции 100
§ 11. Предел функции на бесконечности 115
§ 12. Свойства функций, непрерывных в точке и на промежутке 121
§ 13. Касательная к графику функции и производная 131
§ 14. Техника дифференцирования 141
§ 15. Производные тригонометрических функций 148
§ 16. Производная сложной функции 154
§ 17. Производные показательной и логарифмической функций 161
§ 18. Применение производной к исследованию функций 167
§ 19. Экстремумы функции 173

§ 20. Применение второй производной к исследованию функций и построению их графиков 182
§ 21. Наибольшее и наименьшее значения функции 193
§ 22. Производная как скорость 200
§ 23. Применение производной для решения уравнений и доказательства неравенств 207
Готовимся к тематическому контролю 213
Тестовые задания 213
Типовые задачи для контрольной работы 214
Исторические сведения 215
Главное в разделе 2 217

Раздел 3 ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ



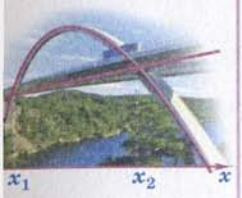
§ 24. Первообразная и интеграл 221
§ 25. Нахождение первообразных 228
§ 26. Первообразная и площадь криволинейной трапеции 233
§ 27. Определённый интеграл 240
§ 28. Применение интеграла 250
§ 29. О дифференциальных уравнениях 258
Готовимся к тематическому контролю 262
Тестовые задания 262
Типовые задачи для контрольной работы 264
Исторические сведения 265
Главное в разделе 3 268

Раздел 4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 30. Комбинаторика. Правила суммы и произведения 271
§ 31. Размещения и перестановки 279
§ 32. Комбинации и бином Ньютона 285
§ 33. Сведения о статистике 293
§ 34. Графические представления информации о выборке 300
§ 35. Случайные события и их вероятности 311

§ 36. Относительная частота события и случайные величины 322
Готовимся к тематическому контролю 330
Тестовые задания 330
Типовые задачи для контрольной работы 331
Исторические сведения 332
Главное в разделе 4 334

Раздел 5 УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ



§ 37. Уравнения и методы их решения 337
§ 38. Неравенства и методы их решения 347
§ 39. Системы уравнений и методы их решения 359
§ 40. Задачи с параметрами 371
Готовимся к тематическому контролю 383
Тестовые задания 383
Типовые задачи для контрольной работы 384
Исторические сведения 385
Главное в разделе 5 387

Ответы и указания 389
Предметный указатель 398

Если мы хотим точно решить хотя бы самый простой вопрос, касающийся движения твердых или жидких тел, мы не можем обойтись без помощи анализа бесконечно малых ... Можно сказать, что во всех областях науки этот высший анализ применяется так широко, что всё чего можно достичь, не прибегая к нему, можно считать почти ничем (за ничто).

Л. Ейлер

Важнейшие вопросы жизни — это в основном только проблемы вероятности. В том небольшом числе (количестве) вещей, которые мы можем познавать с уверенностью, даже в математических науках, основными средствами открытия истины являются индукция и аналогия, основанные на вероятностях. Таким образом, вся система человеческого знания связана с теорией вероятности.

П. Лаплас

Уважаемые старшеклассники!

Алгебра и начала анализа — учебный предмет, который раскрывает важнейшие темы алгебры, математического анализа, теории функций и теории вероятностей. С помощью этого учебника вы будете завершать изучение алгебры и начал анализа в средней школе. Чтобы представить весь её курс и понять, какое место занимает в ней материал 11 класса, рассмотрите помещённую ниже диаграмму. Цветом выделен материал, который вы будете изучать в этом году.

Алгебра и начала анализа

Функции, многочлены, уравнения и неравенства.
Степенная функция.
Тригонометрические функции.
Тригонометрические уравнения и неравенства.

Показательная и логарифмическая функции.
Предел и непрерывность.
Производная и её применение.
Интеграл и его применение.
Элементы теории вероятностей и математической статистики.
Уравнения, неравенства и их системы.

В учебнике предлагается естественная последовательность изложения тем. Сначала завершается изучение алгебры (показательные и логарифмические функции, уравнения и неравенства), затем рассматриваются важнейшие темы математического анализа (производная, первообразная, интеграл и их применение), наконец — элементы стохастики (комбинаторики, статистики и теории вероятностей).

Особенность учебника в том, что он *двухуровневый*, соответствует академическому и профильному уровням. Разграничение теоретического материала этих уровней в учебнике обозначено значком . Отдельные параграфы предназначе-

ны для учеников профильных классов, но с материалом, содержащимся в них, могут ознакомиться самостоятельно и ученики других классов.

Знать математику — это, прежде всего, уметь её использовать. А для этого следует решать много задач. Упражнения и задачи в учебнике разделены на три уровня: А, Б, В. Подавляющее большинство упражнений уровня В адресовано ученикам профильных классов. Есть также упражнения для устного решения и упражнения для повторения. Упражнения для домашнего задания обозначены значком .

Каждый параграф учебника содержит рубрику «Выполним вместе», в которой представлено несколько задач с решениями. Советуем просмотреть их, прежде чем выполнять домашнее задание.

Отвечая на вопросы рубрики «Проверьте себя», вы можете лучше закрепить, обобщить и систематизировать новые знания.

Проверить, как вы усвоили материал раздела, и хорошо подготовиться к внешнему независимому оцениванию вы сможете, решая задачи и выполняя задания из рубрик «Тестовые задания» и «Типовые задачи для контрольной работы ». Полезно посмотреть содержание, форзацы и последнюю часть учебника, чтобы выяснить, какие в них есть справочные материалы: таблицы, формулы, предметный указатель и т.д.

Надеемся, что изучение алгебры и начал анализа по этому учебнику будет для вас интересным и несложным.

Авторы

Раздел 1
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Основные темы раздела

- Повторение сведений о функциях
- Степени с действительными показателями
- Показательные функции
- Показательные уравнения и неравенства
- Логарифмы и их свойства
- Логарифмические функции
- Логарифмические уравнения и неравенства
- Показательные и логарифмические уравнения, неравенства и их системы с параметрами

Никакое другое понятие не отражает явлений реальной действительности с такой непосредственностью и с такой конкретностью, как понятие функциональной зависимости, в котором воплощены и подвижность, и динамичность реального мира, и взаимная обусловленность реальных величин.

А. Я. Хинчин

В этом разделе вы ознакомитесь с двумя видами важных числовых функций: $y = a^x$ и $y = \log_a x$. Обе они тесно связаны со степенями с произвольным действительным показателем. Поэтому в разделе сначала повторяются основные сведения о функциях и уточняется, что следует понимать под степенью с любым действительным показателем.

§ 1. ФУНКЦИИ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Повторим важнейшие сведения о функции.

Если каждому значению переменной x из некоторого множества D соответствует единственное значение переменной y, то такое соответствие называют *функцией*.

При этом x называют *независимой переменной*, или *аргументом*, y — *зависимой переменной*, или *функцией*.

Множество всех значений, которые может принимать аргумент, называют *областью определения* данной функции и обозначают буквой D.

Множество всех значений y, *которые* может принимать функция, называют *областью значений* и обозначают буквой E (*рис. 1*).

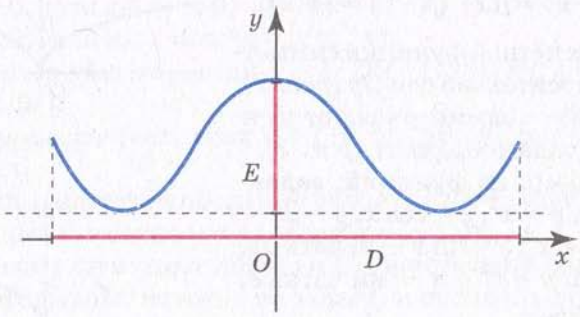


Рис. 1

Две функции считаются *разными*, если у них разные области определения или правила соответствия. Например, функция $y = x^2$, заданная на промежутке $[-3; 3]$, и функция $y = x^2$, заданная на $\boldsymbol{R}$, разные. А заданные на $\boldsymbol{R}$ функции $y = \sin 2x$ и $y = 2 \sin x \cos x$ одинаковые, поскольку выражения $\sin 2x$ и $2\sin x \cos x$ тождественно равны.

Чтобы задать функцию, достаточно указать её область определения и правило соответствия. Если область определения не указывают, то считают, что она такая же, как и область допустимых значений формулы, которой задаётся функция.

Задавать функции можно разными способами: формулами, таблицами, графиками и т. д.

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Графический способ задания функции удобен своей наглядностью. Глядя на график, сразу можно оценить функцию, которую он задаёт, т. е. выявить её важнейшие свойства: найти область определения, область значений; выяснить, является ли данная функция периодической, чётной или нечётной; найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства; определить промежутки возрастания или убывания.

Если функция задана графически, то область определения функции — проекция её графика на ось Ox; область значений — проекция её графика на ось Oy (см. *рис. 1*).

Функция называется *чётной* (*нечётной*), если область её определения симметрична относительно числа 0 и для каждого значения x из области определения $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

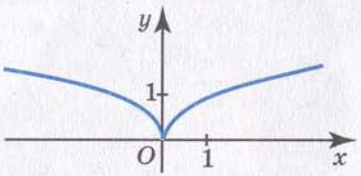


Рис. 2

График чётной функции симметричен относительно оси Oy (*рис. 2*), а нечётной — симметричен относительно начала координат (*рис. 3*).

Например, из функций, заданных на $\boldsymbol{R}$, $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = |x|$ — чётные, $y = x^3$, $y = \sin x$ — нечётные, а $y = x + 3$, $y = x^2 + x$ — ни чётные, ни нечётные.

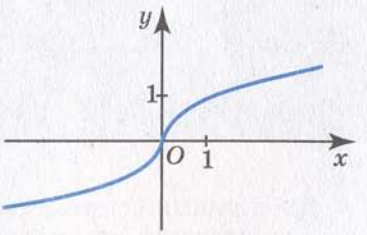


Рис. 3

Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области её определения $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

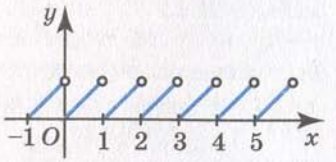


Рис. 4

График периодической функции с периодом T отображается на себя параллельным переносом на расстояние T вдоль оси Ox (*рис. 4*). Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ периодические с наименьшим положительным

периодом 2π, а функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ — с наименьшим положительным периодом π.

Область определения периодической функции — вся числовая прямая, или периодически повторяющееся бесконечное с обеих сторон множество числовых промежутков.

Функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента x из этого промежутка большему значению x соответствует большее (меньшее) значение y.

Например, функция $y = x^2$ на промежутке $[0; \infty)$ возрастает, а на $(-\infty; 0]$ убывает. Функция $y = x^3$ возрастает на всей области определения $\boldsymbol{R}$.

Опишем для примера свойства функции $y = \sin |x|$, $x \in [-2\pi; 2\pi]$, график которой представлен на рисунке 5.

1. Область определения $D(y) = [-2\pi; 2\pi]$.
2. Область значений $E(y) = [-1; 1]$.
3. Функция чётная.
4. Функция не периодическая.
5. График функции с осью Oy пересекается в точке $(0; 0)$.
6. Функция имеет пять нулей: $x = \pi k$, $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
7. $f(x) > 0$, если $x \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$;
   $f(x) < 0$, если $x \in (-2\pi; -\pi) \cup (\pi; 2\pi)$.
8. Функция убывает, если $x \in [-2\pi; -1{,}5\pi]$, $x \in [-0{,}5\pi; 0]$ и $x \in [0{,}5\pi; 1{,}5\pi]$;
   функция возрастает, если $x \in [-1{,}5\pi; -0{,}5\pi]$, $x \in [0; 0{,}5\pi]$ и $x \in [1{,}5\pi; 2\pi]$.
9. Функция имеет наибольшее значение $y = 1$, если $x = \pm 0{,}5\pi$ и наименьшее значение $y = -1$, если $x = \pm 1{,}5\pi$.

Исследовать функцию можно и без построения графика — с помощью формулы, которая её задаёт, и специальных методов математического анализа. С такими методами исследования функций вы ознакомитесь в следующих разделах.

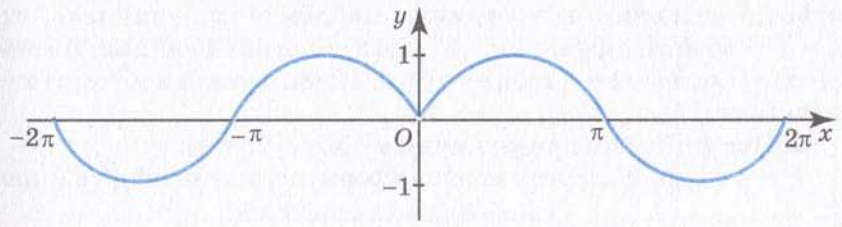


Рис. 5

Функция $y = f(x)$ называется *рациональной*, если $f(x)$ — рациональное выражение относительно переменной x. Таковыми, в частности, есть линейные, квадратичные и степенные функции с целыми показателями. Из всех рациональных функций только функция $y = c$ может быть периодической (*рис. 6*).

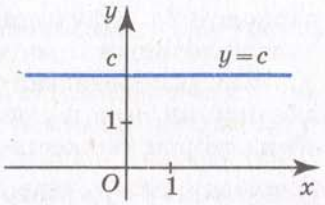


Рис. 6

Функция задана формулой $y = 0$ (на области, симметричной относительно нуля) — одновременно чётная и нечётная.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое функция? Как обозначают функции?
2. Что такое область определения и область значений функции?
3. Как можно задавать функцию?
4. Какие виды функций вы знаете? Каковы их графики?
5. Какие функции называют возрастающими? А убывающими?
6. Какие функции называют чётными? А нечётными? Приведите примеры.
7. Какие функции называют периодическими? Приведите примеры периодических функций.
8. Что значит исследовать функцию?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Для функции $y = x^3 - 5$ найдите:

а) значение функции, если значение аргумента равно 10;

б) значение аргумента, при котором значение функции равно 120.

Р е ш е н и е. а) Если $x = 10$, то $y = 10^3 - 5 = 1000 - 5 = 995$;

б) если $y = 120$, то $x^3 - 5 = 120$, отсюда $x^3 = 125$, а $x = 5$.

2. Докажите, что функция $y = x\cos x$ — нечётная.

Р е ш е н и е. Область определения функции $y = x\cos x$ — множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$ — симметричное относительно начала координат. Найдём $y(-x)$, учитывая, что $y = x$ — нечётная функция, а $y = \cos x$ — чётная функция. Имеем: $y(-x) = -x\cos(-x) = -x\cos x = -y(x)$. Итак, функция $y = x\cos x$ — нечётная.

3. Постройте график функции $y = |x - 3|(x + 1)$.

Р е ш е н и е. Раскроем модуль в формуле, задающей функцию:

$$y = \begin{cases} (x-3)(x+1), \text{ если } x \geq 3, \\ -(x-3)(x+1), \text{ если } x < 3. \end{cases}$$

Графиком функции $y=(x-3)(x+1)$, если $x \geq 3$, является часть параболы, которая проходит через точки $(-1; 0)$, $(3; 0)$ и имеет вершину в точке $(1; -4)$. Если $x < 3$, то графиком функции является часть параболы, которая проходит через точки $(-1; 0)$, $(3; 0)$ и имеет вершину в точке $(1; 4)$.

Графиком данной функции $y = |x - 3|(x + 1)$ является объединение обоих графиков (*рис. 7*).

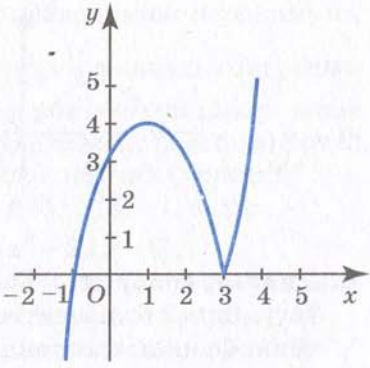


Рис. 7

Выполните устно

1. Функция $y = x^2$ задана на промежутке $[-2; 5]$. Найдите её область значений.
2. Найдите область определения функции $y = x^3$, если её область значений $[-8; 27]$.
3. Какой из графиков, изображённых на рисунке 8, не является графиком функции?
4. Среди функций, графики которых изображены на рисунке 8, укажите: а) чётные, б) нечётные.
5. Какие из функций $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = 2x^2 + 3$, $y = \sqrt{x}$ чётные, а какие — нечётные?
6. Может ли одна и та же функция быть чётной и нечётной?
7. Какие из функций $y = \sin 2x$, $y = -\cos x$, $y = \dfrac{1}{x}$ периодические?

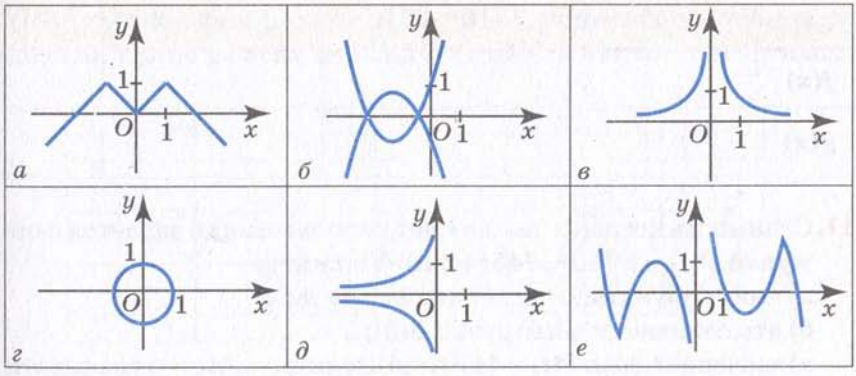


Рис. 8

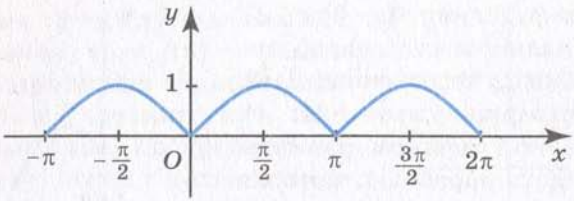


Рис. 9

8. Ученик говорит: «Если для двух некоторых значений аргумента x большему значению x соответствует большее значение функции, то такая функция возрастает на промежутке $(a; b)$». Правильно ли это?

9. На рисунке 9 изображён график функции $y = |\sin x|$, заданной на промежутке $[-\pi; 2\pi]$. Ответьте на вопросы:
а) какова область значений функции;
б) сколько нулей имеет функция;
в) является ли функция чётной;
г) является ли функция периодической;
д) на каких промежутках функция возрастает?

Уровень А

10. Найдите значения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в точках $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$, если:
а) $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = |2x - 3|$;
б) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.
Результаты представьте в виде таблицы.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							

11. Стоимость ксерокса после t лет использования задаётся формулой $B(t) = 8940 - 745t$ (грн). Укажите:
а) какую функцию задаёт эта формула;
б) что означает и чему равно $B(5)$;
в) значение t, если $B(t) = 4470$ и объясните, на что это указывает;
г) первоначальную стоимость ксерокса.

12. Сопротивление R проводника определяется по формуле, $R = \rho\frac{l}{S}$, где l и S соответственно длина и площадь поперечного сечения проводника, а ρ — удельное сопротивление вещества, из которого он изготовлен. Задайте зависимость: а) S от R; б) S от l. Какой график имеет каждая из этих функций?

13. Вычислите значение выражения $f(5) - f(3) - 1$, если:

а) $f(x) = x^3 - 2x + 1$; б) $f(x) = (x^2 - 2)(x + 5)$.

14. Функцию задано формулой $y = 2x^2 - 1$. Найдите значения:

а) функции, если значения аргумента равны 2, 4, 6, 8; 10;

б) аргумента, если значения функции равны 1, 3, 5, 7, 9.

Найдите область определения функции (**15—16**).

15. а) $y = \sqrt{2x}$; б) $y = x^2 - 5$; в) $y = x^{-3}$; г) $y = \sqrt{x^2}$;

д) $y = \frac{5}{x^2+2}$; е) $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$; ё) $y = 1 + \frac{1}{x}$; ж) $y = \frac{x}{x-4}$.

16. а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^{-2}$; в) $y = 3 - x$; г) $y = \sqrt{x^2+1}$;

д) $y = \frac{x+4}{x-2}$; е) $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$; ё) $y = x + \frac{4}{x}$; ж) $y = \frac{x}{x^2-4}$.

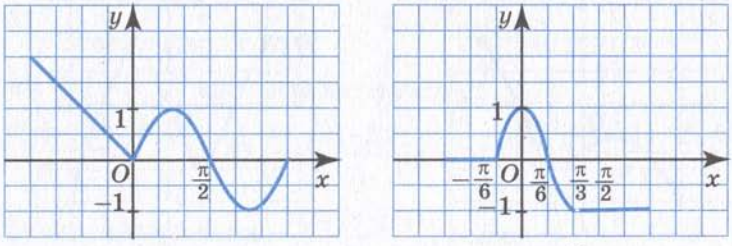
17. Для каждой из функций, графики которых представлены на рисунке 10, установите: а) область определения; б) область значений; в) нули; г) промежутки знакопостоянства; д) промежутки монотонности.

Какова область значений функции (**18—19**)?

18. а) $y = \sqrt{4-x}$; б) $y = x^2 - 1$; в) $y = 3 - x$; г) $y = 2 + \sqrt{x}$.

19. а) $y = x^2 + 4$; б) $y = \sqrt{1+x}$; в) $y = 3x$; г) $y = 9 - \sqrt{x}$.

Постройте график функции (**20—21**). С помощью графика определите, какие из этих функций чётные, а какие — нечётные.



а б

Рис. 10

20. а) $y = x^3$; б) $y = -x^2$; в) $y = x^{-2}$; г) $y = x^{\frac{1}{2}}$.

21. а) $y = \sin x$; б) $y = -\cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.

Уровень Б

Постройте график функции и установите её промежутки монотонности (**22—23**).

22. а) $y = x^2$; б) $y = 2x^2$; в) $y = 2x^2 - 3$; г) $y = |2x^2 - 3|$.

23. а) $y = \frac{12}{x}$; б) $y = \frac{12}{x} - 4$; в) $y = \frac{12}{|x|} - 4$; г) $y = \left|\frac{12}{x} - 4\right|$.

24. Соответствие между длиной маятника l и его периодом колебания T задаётся формулой $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где $\pi \approx 3{,}14$, $g \approx 9{,}8 \text{м/с}^2$. Какую функцию задаёт эта зависимость? Какой функцией задаётся зависимость длины маятника от периода его колебания?

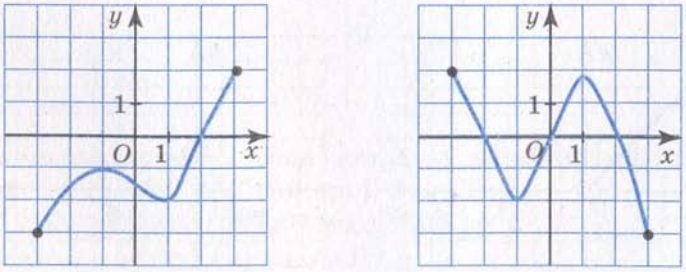
25. Движение двух мотоциклистов в одной системе координат задано функциями $x_1(t) = 0{,}2t^2 + 2t$ и $x_2(t) = 80 - 4t$ ($x(t)$ — в километрах, t — в минутах). Установите: а) время встречи мотоциклистов; б) расстояние, пройденное ими до встречи.

26. На рисунке 11 изображён график функции $y = f(x)$. Постройте графики функций $y = f(x + 1)$; $y = f(x) + 1$; $y = f(|x|)$; $y = |f(x)|$. С помощью построенных графиков для каждой функции установите: а) промежутки монотонности; б) интервалы знакопостоянства; в) наибольшее и наименьшее значения функции; г) какая из функций является чётной.

27. Докажите, что функция $y = x^2 + 2x$ на промежутке $[0; \infty)$ возрастает.

28. Найдите промежутки, на которых принимает положительные значения функция:

а) $y = 3x - x^2$; б) $y = (x - 3)^2$; в) $y = \sin(x - 0{,}5\pi)$.



а *б*

Рис. 11

29. Докажите, что функция $y = f(x)$ чётная, если:

а) $f(x) = x^4 + 3x^2$; б) $f(x) = 3x(x^3 - 2x)$;

в) $f(x) = \frac{4}{x^2-4}$; г) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

30. Докажите, что функция y нечётная, если:

а) $y = x(1 - x^2)$; б) $y = 7x^3 + x$;

в) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$; г) $y = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$.

Уровень В

31. Найдите период функции:

а) $y = 5\sin 0{,}5x$; б) $y = \cos(2x - 3)$; в) $y = 3\operatorname{tg} 0{,}25x$.

32. Функцию $y = |1 - x^2|$ задано на промежутке $[-2; 2]$. Продолжите её график периодически с периодом $T = 4$ на всю числовую прямую. Найдите: а) $y(10)$; б) $y(100)$.

Найдите область определения функции (**33—34**).

33. а) $y = \sqrt{2\sin x}$; б) $y = (x^2 - 5)^{-0,5}$; в) $y = (\pi + \sin x)^{-3}$.

34. а) $y = \frac{\sqrt{|x|-3}}{x^2-10}$; б) $y = \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{|x|-2}$; в) $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

Постройте график функции (**35—37**).

35. а) $y = |x - 3| + |x - 4|$; б) $y = |x^2 - |x| - 2|$;

в) $y = \left|\frac{2}{|x|-1} + 2\right|$; г) $y = \left|\sqrt{|x|+4} - 3\right|$.

36. а) $y = 3\sin\frac{x}{2}$; б) $y = -3\sin|2x|$; в) $y = \left|\cos\frac{x}{2} + 1\right|$.

37. а) $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, \text{ если } x \le 0, \\ 3\cos x - 3, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} \cos 2x, \text{ если } x \le \pi, \\ -\frac{1}{2}, \text{ если } x > \pi. \end{cases}$

38. Дано $f(x) = x^2$. Упростите выражение:

а) $\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$; б) $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$; в) $\frac{f(1+\varepsilon)+f(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon^2}$.

39. Упростите выражение $\frac{f(x+3)-f(3)}{x}$, если:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = 1 - x^3$; в) $f(x) = (2x^2 - 1)(1 + 2x^2)$.

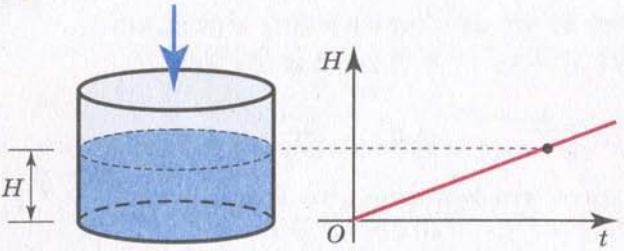


Рис. 12

40. Если добавлять воду в контейнер с постоянной скоростью, то высота воды в контейнере будет функцией от времени *(рис. 12)*. Изобразите схематически график зависимости высоты воды от времени наполнения контейнера, изображённого на рисунке 13.

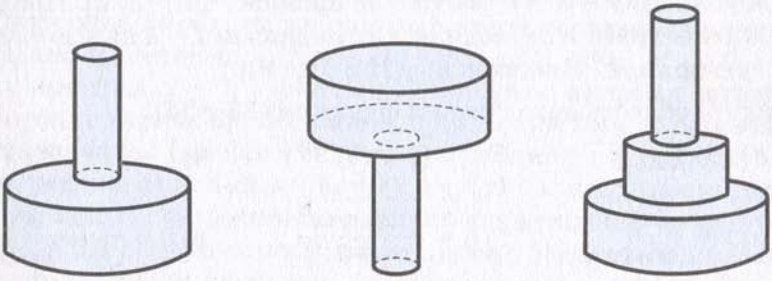


Рис. 13

41. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^2 - 12x - 3$ на отрезке: а) $[-10; 0]$; б) $[-5; 5]$; в) $[0; 10]$.

42. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции для каждого значения параметра:

а) $y = x^2 + 4x + a$ на отрезках: 1) $[-3; 1]$; 2) $[0; 5]$;

б) $y = -x^2 + 4x - 2a$ на отрезках: 1) $[-1; 3]$; 2) $[-5; 0]$.

Упражнения для повторения

43. ***Задача Ал-Кархи.*** Найдите площадь прямоугольника, основание которого вдвое больше высоты, а площадь численно равна периметру.

44. Для множеств $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5, 7\}$ и $C = \{2, 4, 5\}$ найдите:

а) $(A \cup B) \cup C$; б) $(A \cap B) \cap C$; в) $(A \cap B) \cup C$; г) $(A \cup B) \cap C$.

45. Решите уравнение:

а) $\frac{x+1}{x}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}=3$;

б) $\sqrt{\frac{x+5}{2x}}-3\sqrt{\frac{2x}{x+5}}=-2$;

в) $x^2-4x-\sqrt{2x^2-8x+12}=6$;

г) $3x^2-3x+2\sqrt{x^2-x-5}=20$.

§ 2. СТЕПЕНИ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Вспомните, как постепенно расширялось понятие степени. Сначала вводилось понятие степени числа с натуральным показателем n:

$$a^n=a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a;\quad a^1=a.$$

Затем рассматривались степени с целым показателем:

$$a^0=1;\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq 0);$$

наконец — с произвольным рациональным показателем степени:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a>0).$$

Математики часто используют также степени с произвольными действительными показателями. Множество действительных чисел состоит из чисел рациональных и иррациональных. Что такое степень с рациональным показателям, вы уже знаете. Введём понятие *степени с иррациональным показателем.*

Пусть

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ \ldots \qquad (*)$$

бесконечная последовательность рациональных приближений числа $\sqrt{2}$ с точностью до десятых, сотых, тысячных и т. д. То есть это последовательность рациональных чисел, достаточно близко приближающихся к $\sqrt{2}$. Тогда

$$3^{1,4};\ 3^{1,41};\ 3^{1,414};\ 3^{1,4142};\ 3^{1,41421};\ \ldots \qquad (**)$$

последовательность чисел (степеней с рациональными показателями), которые как угодно близко приближаются к некоторому действительному числу. Это действительное число и принято считать значением степени $3^{\sqrt{2}}$.

Приближённые значения (с точностью до десятых, сотых, тысячных и т. д.) для степеней $3^{\sqrt{2}}$ и $5^{\sqrt{2}}$ представлены в таблице, выполненной с помощью программы Excel (*рис. 14*).

Microsoft Excel - степени

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Дан

N8 fx

	A	B	C	D	E	F	G
1	$\sqrt{2}$	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421	1,414214
2	$3^{\sqrt{2}}$	4,7	4,73	4,729	4,7288	4,72880	4,728804
3	$5^{\sqrt{2}}$	9,7	9,74	9,739	9,7385	9,73852	9,738518
4							

Рис. 14

З а м е ч а н и е. Приведённое выше объяснение понятия степени с иррациональным показателем с точки зрения математики не совсем корректное, поскольку в нём используется нематематическое понятие «близко подходит». В математике ему соответствует понятие *предел последовательности. Число* a называют пределом бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, … , a_n, … , если для любого положительного числа ε найдётся такое натуральное число N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Поэтому правильнее было бы сказать, что если пределом последовательности (*) есть число $\sqrt{2}$, то пределом последовательности (**) является число $3^{\sqrt{2}}$. Вообще, если $a > 0$ — число действительное, а α — иррациональное, то под степенью a^{α} понимают предел бесконечной последовательности $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, \ldots, a^{\alpha_n}, \ldots$, где α_1, α_2, …, α_n, … — бесконечная последовательность, пределом которой является число α. Корректность такого определения обоснована в строгих курсах математического анализа. В § 9 будут представлены подробные сведения о границе числовой последовательности.

Какими бы ни были действительные числа $a > 0$ и α, степень a^{α} всегда имеет смысл, т. е. равна некоторому действительному числу. Для таких степеней выполняются свойства:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; 2) $a^r : a^s = a^{r-s}$; 3) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$;

4) $(ab)^r = a^r b^r$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Выражения, содержащие степени с действительными показателями, можно преобразовывать так же, как выражения со степенями с рациональными показателями.

Пример.

$$\frac{49^{\sqrt{2}}-a^{\frac{2}{\pi}}}{7^{\sqrt{2}}+a^{\frac{1}{\pi}}}=\frac{\left(7^{\sqrt{2}}\right)^2-\left(a^{\frac{1}{\pi}}\right)^2}{7^{\sqrt{2}}+a^{\frac{1}{\pi}}}=\frac{\left(7^{\sqrt{2}}-a^{\frac{1}{\pi}}\right)\left(7^{\sqrt{2}}+a^{\frac{1}{\pi}}\right)}{7^{\sqrt{2}}+a^{\frac{1}{\pi}}}=7^{\sqrt{2}}-a^{\frac{1}{\pi}}.$$

Как вы уже знаете, степени с дробными показателями рассматривают только при условии, что их основания — числа положительные. И степени с иррациональными показателями рассматривают только при условии, что основания степеней — числа положительные. А, например, выражения $0^{-0,5}$, $(-2)^{\frac{1}{8}}$, $(-\pi)^{1,3}$, $(-3)^{\sqrt{2}}$ — не имеют смысла. Это записи, которые не обозначают никаких чисел. Но, если $\alpha > 0$, то 0^{α} существует и $0^{\alpha} = 0$.

Зная только степени с рациональными показателями, вы раньше и степенные функции рассматривали не все, а только такие, показатели степеней которых были рациональными числами. Теперь понятие степенной функции можно расширить. *Степенной* далее будем называть функцию $y = x^{\alpha}$, где α — произвольное действительное число. В частности, функции $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^{-\pi}$ — степенные. Свойства этих функций такие же, как и свойства степенных функций с рациональными показателями степеней.

При каждом действительном α степенная функция $y = x^{\alpha}$ определена на промежутке $(0; \infty)$. Свойства таких функций указаны в таблице.

Свойства степенной функции $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$

	x^{α}	
	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
$D(x)$	$[0; \infty)$	$(0; \infty)$
$E(x)$	$[0; \infty)$	$(0; \infty)$
$y > 0$	$(0; \infty)$	$(0; \infty)$
убывающая	—	$(0; \infty)$
возрастающая	$[0; \infty)$	—

Если α — положительное иррациональное число, функция $y = x^{\alpha}$ определена на промежутке $[0; \infty)$; такое же и множество её значений. Если иррациональное число α отрицательное, то областью определения и областью значений функции $y = x^{\alpha}$ является промежуток $(0; \infty)$. Несколько графиков таких функций изображены на рисунках 15, 16.

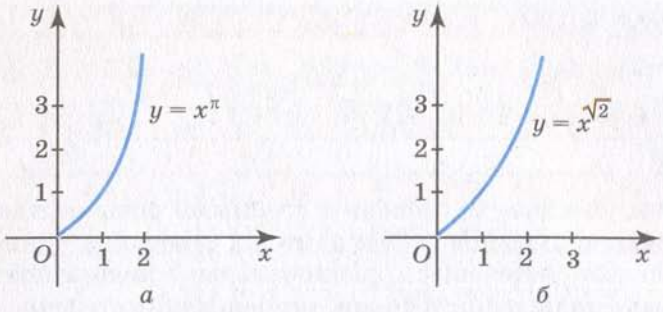


Рис. 15

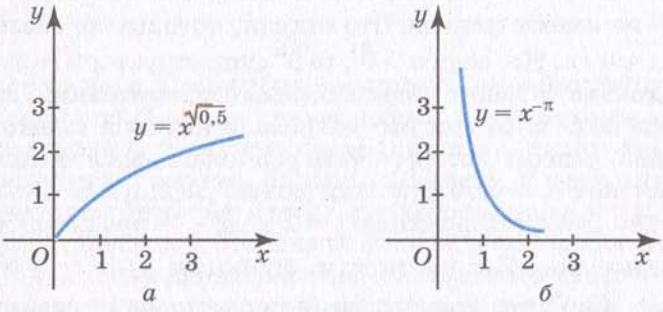


Рис. 16

Для отдельных значений α степенная функция может рассматриваться и на более широкой области определения. В частности при натуральных α она определена на $\boldsymbol{R}$ (*рис. 17, а*), а при целых отрицательных — на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ (*рис. 17, б*). В этих случаях при чётных значениях α функция $y = x^{\alpha}$ чётная, а при нечётных α — нечётная.

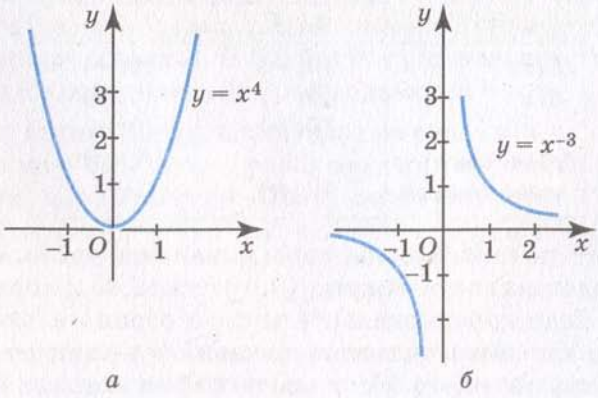


Рис. 17

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое степень числа с натуральным показателем?
2. Каким равенством можно определить степень числа с целым отрицательным показателем? А с дробным показателем?
3. Что понимают под степенью положительного числа с иррациональным показателем?
4. Какие свойства имеют степени с произвольными действительными показателями?
5. Как можно преобразовывать выражения, содержащие степени с произвольными действительными показателями?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Проходит ли график функции $y = x^{0,75}$ через точку $M\,(16; 8)$?

Р е ш е н и е. Если $x = 16$, то $y = 16^{0,75} = 16^{\frac{3}{4}} = 8$.

О т в е т. Проходит.

2. Известно, что график функции $y = x^{\alpha}$ проходит через точку $P\left(2; \frac{1}{4}\right)$. Чему равно α?

Р е ш е н и е. $\frac{1}{4} = 2^{\alpha}$, $2^{-2} = 2^{\alpha}$, отсюда $\alpha = -2$.

О т в е т. -2.

3. Упростите выражение $\left(5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}\right) : 5^{\sqrt{2}}$.

Р е ш е н и е. $\left(5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}\right) : 5^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}}(1 - 5^{-1}) : 5^{\sqrt{2}} = 0{,}8$.

О т в е т. 0,8.

4. Сравните числа: а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{\sqrt{3}}$ и $\left(\frac{7}{4}\right)^{\sqrt{3}}$; б) $(2{,}5)^{-\pi}$ и $(5{,}2)^{-\pi}$.

Р е ш е н и е. а) Функция $y = x^{\sqrt{3}}$ $(x > 0)$ — возрастающая, так как $\sqrt{3} > 0$. Поскольку $\frac{4}{7} < \frac{7}{4}$, то $\left(\frac{4}{7}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{7}{4}\right)^{\sqrt{3}}$.

б) Функция $y = x^{-\pi}$ $(x > 0)$ — убывающая, так как $-\pi < 0$, поэтому $(2{,}5)^{-\pi} > (5{,}2)^{-\pi}$.

Выполните устно

Вычислите (46—48).

46. а) $81^{\frac{1}{4}}$; б) $625^{\frac{1}{4}}$; в) $0{,}0016^{\frac{1}{4}}$; г) $1^{\frac{1}{4}}$.

47. а) $49^{0,5}$; б) $6{,}25^{0,5}$; в) $0{,}0016^{0,5}$; г) $0^{0,5}$.

48. а) 4^{-1}; б) 2^{-1}; в) $0{,}5^{-1}$; г) $(-1)^{-1}$.

49. Какое из следующих выражений не существует:

а) $(-4)^{-1}$; б) 2^0; в) $(-5)^{0,5}$; г) $(-1)^0$; д) π^{π}; е) $0^{-\sqrt{3}}$?

50. Укажите область определения функции:

а) $y = x^3$; б) $y = x^{-\sqrt{3}}$; в) $y = x^{\frac{3}{7}}$; г) $y = x^{-0,5}$.

Вычислите (51—52).

51. а) $(-4)^{-1} \cdot 2^2$; б) $2^{32} \cdot 0{,}5^{30}$; в) $5^{0,5} \cdot 5^{1,5}$; г) $\pi^{\pi} : \pi^{1+\pi}$.

52. а) $5^{\sin\frac{\pi}{6}} \cdot 5^{\cos\frac{\pi}{3}}$; б) $(23^{\operatorname{tg}3})^{\operatorname{ctg}3}$; в) $(52)^{0,5} : (52)^{0,5\cos\pi}$.

Уровень А

53. Представьте в виде степени с основанием 2 число:

а) 8; б) $\frac{1}{16}$; в) $\sqrt{2}$; г) 0,25;

д) 1024; е) 0,5; ё) $\sqrt[3]{4}$; ж) 0,0625.

54. Представьте в виде степени с основанием 3 число:

а) 81; б) 27; в) $9^{\sqrt{2}}$; г) 81^{-1};

д) $\sqrt[3]{9}$; е) 1; ё) $729^{0,25}$; ж) 27^{π}.

55. Вычислите:

а) $32^{0,4}$; б) $27^3 : 9^4$; в) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4}$; г) $(81^{-1})^{0,25}$;

д) $\left(9^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; е) $25^{\pi} \cdot 5^{-2\pi}$; ё) $49^{0,25} \cdot \sqrt{7}$; ж) $2^{\pi} \cdot 0{,}5^{\pi}$.

56. Вычислите с помощью калькулятора или программы Excel с точностью до сотых:

а) 2^{π}; б) $3{,}8^{\pi}$; в) $5^{\sqrt{2}}$; г) $8^{\pi+1}$; д) $0{,}5^{2\pi}$; е) $2{,}9^{\frac{\pi}{2}}$.

57. Имеет ли значение выражение:

а) $(-5)^{\frac{2}{3}}$; б) $7^{\frac{11}{43}}$; в) $0^{\frac{5}{7}}$; г) $(-1)^{\pi}$;

д) $(-3)^{-8}$; е) $0^{-\frac{4}{3}}$; ё) $0^{\sqrt{3}}$; ж) π^{π}?

Упростите выражение (58—59).

58. а) $(a - x^{0,5})(a + x^{0,5})$; б) $(x - 4) : (x^{0,5} + 2)$;

в) $(a-b):\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$; г) $\left(c^{\frac{1}{2}}-p^{\frac{1}{4}}\right)\left(c^{\frac{1}{2}}+p^{\frac{1}{4}}\right)$.

59. а) $\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)$; б) $\left(n^{\frac{1}{3}}+2\right)\left(n^{\frac{2}{3}}-2n^{\frac{1}{3}}+4\right)$;

в) $(a-8):\left(a^{\frac{1}{3}}-2\right)$; г) $(1-x):\left(1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)$.

60. Возрастающей или убывающей является функция:

а) $y = x^{0,3}$; б) $y = x^{-\sqrt{3}}$; в) $y = x^{\frac{3}{7}}$; г) $y = x^{-0,5}$?

Постройте график одной из функций.

61. Сравните числа:

а) $8^{0,3}$ и $9^{0,3}$; б) $7^{-\sqrt{3}}$ и $8^{-\sqrt{3}}$; в) $8^{-\sqrt{2}}$ и $9^{-\sqrt{2}}$; г) $0,5^{\pi}$ и $0,4^{\pi}$.

62. Проходит ли график функции $y = x^{-0,5}$ через точку A, если:
а) $A(4; 5)$; б) $A(4; 0,5)$; в) $A(4; -0,5)$; г) $A(25; 0,2)$?

63. Проходит ли график функции $y = x^{\sqrt{3}}$ через точку M, если:
а) $M(1; 1)$; б) $M(\sqrt{3}; 3)$; в) $M(3; \sqrt{3})$; г) $M(0; 0)$?

64. При каком значении α график функции $y = x^{\alpha}$ проходит через точку $K\left(2; \frac{1}{4}\right)$? А через точку $M(25; 0,2)$?

65. Найдите α, если известно, что график функции $y = x^{\alpha}$ проходит через точку: а) $P(2; 8)$; б) $P(0,2; 5)$; в) $P(\sqrt{3}; 81)$.

66. На промежутке $[1; 10]$ с шагом 0,5 с помощью калькулятора или программы Excel составьте таблицу значений функции: а) $y = x^{0,25}$; б) $y = x^{-0,25}$. Постройте графики этих функций на миллиметровой бумаге.

67. Постройте схематически график степенной функции:
а) $y = x^{0,5}$; б) $y = x^{1,5}$; в) $y = x^{-2}$; г) $y = x^{-0,5}$.

68. Докажите, что график каждой степенной функции проходит через точку $A(1; 1)$.

Уровень Б

69. Представьте в виде степени число:

а) $\frac{\sqrt[4]{27}}{9}$; б) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{125}}$; в) $\sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}$;

г) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{25}\right)^{5}}$; д) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\cdot\frac{9}{4}$; е) $\frac{3\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$.

Вычислите (**70—71**).

70. а) $343^{-\frac{2}{3}}$; б) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}\cdot 243^{-0,4}$; в) $8^{2\frac{1}{3}}:81^{0,75}$;

г) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; д) $8^{\frac{1}{2}}:\left(8^{\frac{1}{6}}\cdot 8^{\frac{2}{3}}\right)$; е) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5}\cdot\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

71. а) $8^{\sqrt{5}}\cdot 8^{-\sqrt{5}}$; б) $\left((0,5)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}$; в) $\left(5^{1+\sqrt{2}}\right)^{1-\sqrt{2}}$;

г) $3^{2\sqrt{2}}:9^{\sqrt{2}}$; д) $2^{2-3\sqrt{5}}\cdot 8^{\sqrt{5}}$; е) $\left(5^{2-\sqrt{5}}\right)^{2+\sqrt{5}}-\left(\sqrt{5}\right)^{0}$.

72. Вычислите, пользуясь микрокалькулятором:

а) $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$; б) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$; в) $\pi^{\sqrt{5}}$;

г) $(2+\pi)^{\pi}$; д) $\left(\sqrt{2}-1\right)^{\pi}$; е) $\left(3\sqrt{2}\right)^{\pi}$.

Упростите выражение (**73—74**).

73. а) $\left(2^{\sqrt{2}-1}+2^{\sqrt{2}+1}\right):2^{\sqrt{2}}$; б) $(3^{\pi}+3^{\pi-2}):3^{\pi}$.

74. а) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}-8^{\sqrt{2}}:2^{3\sqrt{2}}$; б) $9^{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{3}-1}-9^{\pi}:9^{\pi-1}$.

75. Найдите область определения выражения:

а) $(x+5)^{-\frac{3}{7}}$; б) $(a-3)^{-\frac{3}{4}}$; в) $|x+2|^{-\sqrt{3}}$;

г) $a^{\frac{5}{3}}+\sqrt[3]{a}$; д) $(8+x)^{\frac{2}{3}}$; е) $\left|x^2-4\right|^{\sqrt[3]{7}}$.

Представьте в виде степени выражение (76—77).

76. а) $\dfrac{a^{1\frac{1}{2}}a^{0,5}}{a^{\frac{2}{3}}}$; б) $\left(y^{2,5}\right)^2\left(\sqrt[5]{y}\right)^{-1}$; в) $x^{-2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{x^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$.

77. а) $\dfrac{x^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; б) $\sqrt[7]{y^2}\left(y^{-\frac{3}{14}}\right)^2$; в) $\left(\dfrac{a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{a^{-1-\sqrt{3}}}{a^{-2}}$.

Уровень В

Упростите выражение (78—81).

78. а) $\dfrac{\left(x^{2\sqrt{3}}-1\right)\left(x^{2\sqrt{3}}+x^{\sqrt{3}}+x^{3\sqrt{3}}\right)}{x^{4\sqrt{3}}-x^{\sqrt{3}}}$; б) $\left(x^{\pi}+y^{\pi}\right)^2-\left(\left(4^{\frac{1}{\pi}}x^2y^2\right)^{\pi}\right)^{0,5}$;

в) $\dfrac{a-1}{a^{0,75}+a^{0,5}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}$; г) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\dfrac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$.

79. а) $\dfrac{c-1}{c+\sqrt{c}+1}:\dfrac{c^{0,5}+1}{c^{1,5}-1}+2c^{\frac{1}{2}}$; б) $\dfrac{2\left(x^{0,25}-y^{0,25}\right)}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}}-x-y$;

в) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{\pi}{4}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{\pi}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{\pi}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; г) $\dfrac{-b}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$.

80. а) $2^{\sin^2\frac{\pi}{5}}\cdot2^{\cos^2\frac{\pi}{5}}+\left(3^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}}$; б) $\left(4^{2\sin\frac{\pi}{12}}\right)^{\cos\frac{\pi}{12}}+\left(0{,}9^{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\right)^{\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}}$.

81. а) $25^{\cos^2\frac{\pi}{6}}:25^{\sin^2\frac{\pi}{6}}-0{,}09\cdot0{,}09^{\cos\frac{2\pi}{3}}$;

б) $64:64^{\cos120^\circ}-13^{\cos^2\frac{\pi}{13}}\cdot13^{\sin^2\frac{\pi}{13}}$.

82. Известно, что функция $y=x^{\sqrt{2}}$ при $x=c$ имеет значение m. Чему равно значение этой функции при: а) $x=2c$; б) $x=c^{-2}$?

83. На промежутке $[1, 5]$ с шагом 0,5 с помощью калькулятора или программы Excel составьте таблицу значений функции:

а) $y = x^{\sqrt{3}}$; б) $y = x^{-\sqrt{3}}$. Постройте графики этих функций на миллиметровой бумаге.

84. На рисунке 18 представлен график функции $y = x^{\cos 1}$, построенный с помощью программного обеспечения. Постройте графики функций: а) $y = 2x^{\cos 1}$; б) $y = 1 + x^{\cos 1}$; в) $y = -x^{\cos 1}$.

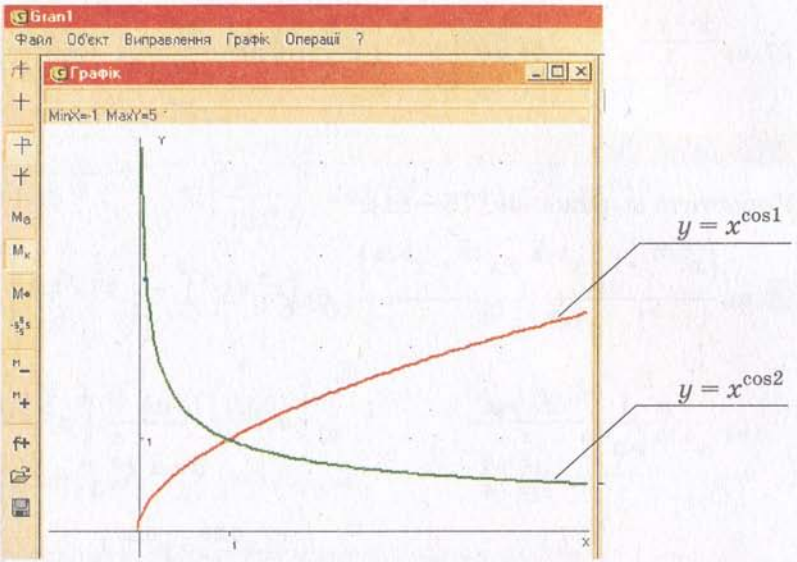


Рис. 18

85. На рисунке 18 представлен график функции $y = x^{\cos 2}$, построенный с помощью программного обеспечения. Постройте графики функций: а) $y = -x^{\cos 2}$; б) $y = x^{\cos 2} - 3$; в) $y = 0{,}5x^{\cos 2}$.

86. Постройте схематически график функции:

а) $y = x^{\sin 1}$; б) $y = x^{\sqrt{0,3}}$; в) $y = x^{\pi - 1}$;

г) $y = x^{1-\sqrt{3}}$; д) $y = x^2 \cdot x^{\sqrt{2}}$; е) $y = x^{\pi - 4}$.

87. Докажите, что графики функций $y = x^{\frac{\pi}{3}}$ и $y = x^{\frac{3}{\pi}}$, заданные на $[0; \infty)$, симметричны относительно прямой $y = x$.

Упражнения для повторения

88. ***Задача из французского математического фольклора.*** Несколько человек должны заплатить 800 франков судебных из-

держек. Но трое не имеют денег, поэтому каждый из оставшихся заплатил на 60 франков больше, чем планировалось. Сколько человек приняло участие в погашении судебных издержек?

89. Решите систему двойных неравенств:

а) $\begin{cases} 0 < 1 - 2x < 1, \\ 3 < 3x + 4 < 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 < 5 - 3x < 3, \\ -3 < 3 - 2x < 1. \end{cases}$

90. Постройте график уравнения:

а) $2x + 3y = 6$; б) $xy = 12$; в) $x^2 + y^2 = 4$; г) $y^2 - x = 0$.

§ 3. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию, заданную равенством $y = 2^x$. Составим таблицу её значений для нескольких значений аргумента:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

На рисунке 19, *а* обозначены точки, координаты которых соответствуют этой таблице. Когда на этой же координатной плоскости обозначить больше точек с координатами x, y, удовлетворяющих равенству $y = 2^x$, они разместятся, как показано на рисунке 19, *б*. А если для каждого действительного значения x вычислить соответствующее значение y и обозначить на координатной плоскости точки с координатами x и y, они разместятся на одной бесконечной кривой (*рис. 19, в*). Эта кривая — график функции $y = 2^x$.

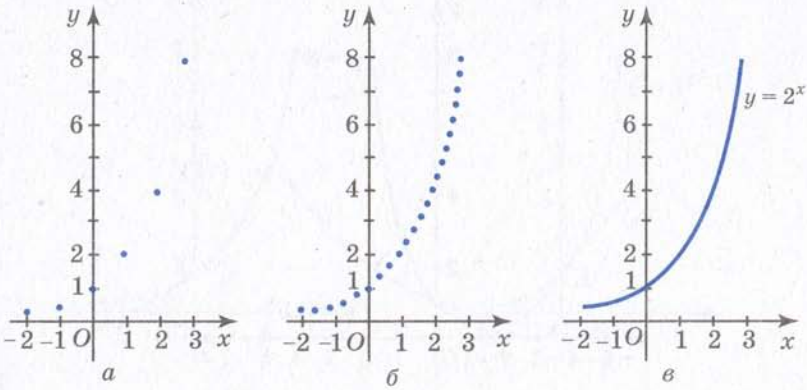


Рис. 19

График функции $y = 2^x$ размещён в I и II координатных четвертях. Когда $x \to -\infty$, он как угодно близко подходит к оси Ox, но общих точек с ней не имеет. Говорят, что график функции $y = 2^x$ асимптотически приближается к оси Ox, что ось Ox — *асимптота* этого графика. Когда x неограниченно увеличивается, график функции $y = 2^x$ всё дальше отходит от оси Ox. Как видим, функция $y = 2^x$ определена для всех действительных чисел, её область значений — промежуток $(0; \infty)$. На всей области определения функция возрастает, она ни чётная, ни нечётная, ни периодическая.

Рассматриваемая функция $y = 2^x$ — пример показательной функции, а именно — показательная функция с основанием 2.

! *Показательной функцией* называется функция, заданная формулой $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Примеры других показательных функций: $y = 3^x$, $y = 0{,}5^x$, $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$. Их графики изображены на рисунке 20. Согласно определению функция $y = 1^x$ не является показательной.

Укажем основные свойства показательной функции.

1) *Область определения функции* $y = a^x$ — *множество* $\boldsymbol{R}$, ибо при каждом положительном a и действительном x выражение a^x определено.

2) *Область значений функции* $y = a^x$ — *множество* $(0; \infty)$, поскольку, если основание a степени положительное, то положительная и степень a^x. Следовательно, функция $y = a^x$ принимает только положительные значения.

3) *Если* $a > 1$, *функция* $y = a^x$ *возрастает, а если* $0 < a < 1$ — *убывает*. Это свойство хорошо видно на графиках функций (*рис. 20*).

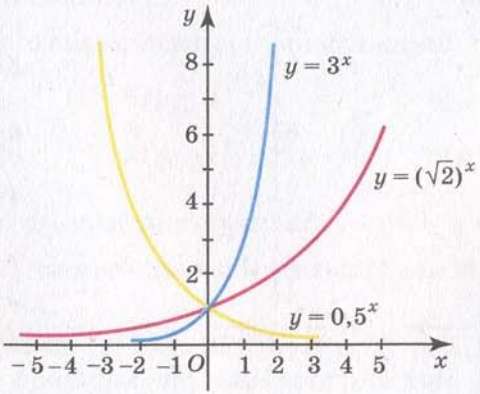


Рис. 20

4) *Функция $y = a^x$ каждое своё значение принимает только один раз*, т. е. прямую, параллельную оси Ox, график показательной функции может пересечь только в одной точке. Это следует из свойства 3.

5) *Функция $y = a^x$ ни чётная, ни нечётная, ни периодическая.* Поскольку каждое своё значение она принимает только один раз, то не может быть чётной или периодической. Не может она быть и нечётной, так как не имеет ни отрицательных, ни нулевых значений.

6) *График каждой показательной функции проходит через точку* $A\,(0, 1)$, поскольку если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

При решении задач и упражнений, связанных с показательной функцией, особенно часто используется третье свойство, в котором указывается на *монотонность* показательной функции, то есть её возрастание или убывание. В частности из него вытекают следующие у т в е р ж д е н и я .

1. Если $a > 0$, $a \neq 1$ и $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$.
2. Если $a > 1$ и $a^{x_1} > a^{x_2}$, то $x_1 > x_2$.
3. Если $0 < a < 1$ и $a^{x_1} > a^{x_2}$, то $x_1 < x_2$.

Присмотритесь к графикам показательных функций $y = 2^x$ и $y = 3^x$ (*рис. 21*). Угловой коэффициент касательной, проведённой в точке $A\,(0; 1)$ к графику функции $y = 2^x$, меньше 1, а к графику функции $y = 3^x$ — больше 1. Существует ли такая показательная функция, у которой угловой коэффициент касательной к её графику в точке $A\,(0, 1)$ равен 1? Существует (*рис. 22*). Основание этой показательной функции — иррациональное число 2,71828 ..., которое принято обозначать буквой e. Показательная функция $y = e^x$ в математике и многих прикладных науках

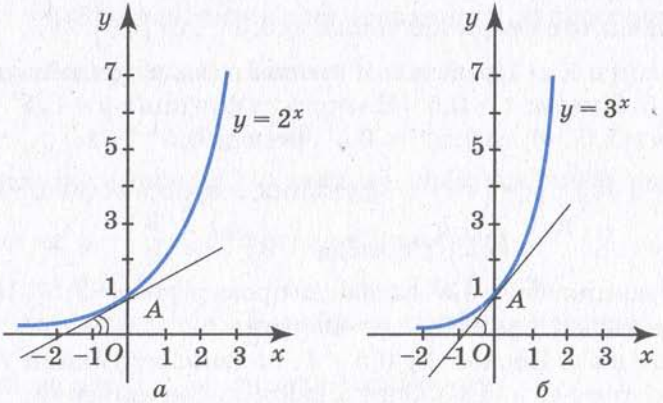


Рис. 21

встречается довольно часто, её называют *экспонентой* (лат. exponens — выставлять напоказ).

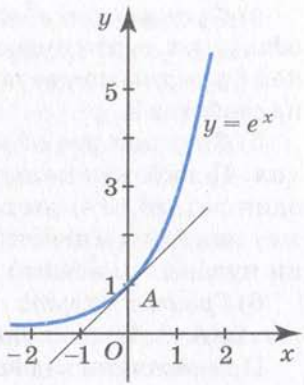


Рис. 22

К показательной функции иногда относят также функции вида $y = ca^{kx+b}$. При помощи таких функций описывают много разных процессов, связанных с физикой, химией, биологией, экономикой, социологией и т. д. Например, процессы новообразования и распада вещества можно описать с помощью формулы $P = P_0e^{kt}$. Здесь P — количество вновь образованного (или распавшегося) вещества в момент времени t, P_0 — начальное количество вещества, k — постоянная, значение которой определяется для конкретной ситуации. Подберите самостоятельно соответствующие примеры.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Сформулируйте определение показательной функции.
2. Какова область определения показательной функции? А область значений?
3. Через какую точку проходит график каждой показательной функции?
4. Может ли значение показательной функции быть отрицательным? А равняться нулю?
5. При каком условии показательная функция возрастает? А при каком — убывает?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Сравните с единицей число: а) $0{,}5^{1{,}5}$; б) $\left(\sqrt{5}\right)^{-0{,}2}$.

Р е ш е н и е. а) Представим число 1 в виде степени с основанием 0,5. Имеем: $1 = 0{,}5^0$. Поскольку функция $y = 0{,}5^x$ — убывающая и $1{,}5 > 0$, то $0{,}5^{1{,}5} < 0{,}5^0$, отсюда $0{,}5^{1{,}5} < 1$;

б) $1 = \left(\sqrt{5}\right)^0$; $y = \left(\sqrt{5}\right)^x$ — функция возрастающая и $-0{,}2 < 0$, поэтому $\left(\sqrt{5}\right)^{-0{,}2} < \left(\sqrt{5}\right)^0$, отсюда $\left(\sqrt{5}\right)^{-0{,}2} < 1$.

2. Функция $f(x) = 0{,}5^x$ задана на промежутке $[-2; 3]$. Найдите её наименьшее и наибольшее значения.

Р е ш е н и е. Поскольку $0{,}5 < 1$, то данная функция убывающая. Поэтому её наименьшее и наибольшее значения:

$$f(3) = 0{,}5^3 = 0{,}125;\ f(-2) = 0{,}5^{-2} = 4.$$

3. Постройте график функции $y = 0{,}5^{|x|}$.

Р е ш е н и е. Функция $y = 0{,}5^{|x|}$ — чётная (проверьте). График чётной функции симметричен относительно оси Oy, поэтому достаточно построить график заданной функции для $x \geq 0$ и отобразить его симметрично относительно оси Oy. Если $x \geq 0$, то $0{,}5^{|x|} = 0{,}5^x$. Построим график функции $y = 0{,}5^x$ для $x \geq 0$ и отобразим его симметрично относительно оси Oy (*рис. 23*).

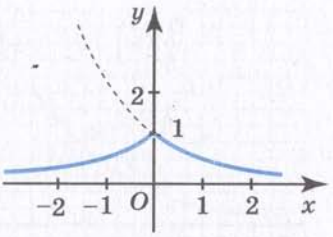


Рис. 23

Выполните устно

91. Какие из функций $y = x^{1,5}$; $y = x^{5-x}$; $y = \pi^x$; $y = \sqrt{2^x}$ показательные?

92. Можно ли считать показательной функцию $y = (-2)^x$? А функцию $y = 2^{-x}$?

93. Возрастающей или убывающей является функция:

а) $y = 2{,}5^x$; б) $y = e^x$; в) $y = 0{,}5^x$; г) $y = 3^{-x}$; д) $y = \pi^x$?

94. Может ли показательная функция быть: а) чётной; б) нечётной; в) периодической?

95. Имеют ли общие точки графики функций:

а) $y = 2^x$ и $y = 2$; б) $y = 2^x$ и $y = 2x$;

в) $y = 2^x$ и $y = -2x$; г) $y = 2^x$ и $y = -2$?

Уровень А

96. Вычислите координаты нескольких точек графика функции $y = 1{,}5^x$ и нанесите их на координатную плоскость.

97. Постройте график функции:

а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; б) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$.

98. Используя рисунок 24, найдите приближённые значения функции $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ в точках с абсциссами:

а) $-4; -2; 0; 1; 3; 4$; б) $-3{,}5; -1{,}5; 0{,}5; 2{,}5$.

99. Используя рисунок 25, найдите приближённые значения функции $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ в точках с абсциссами:

а) $-4; -2; 0; 1; 3$; б) $-3{,}5; -1{,}5; 0{,}5; 2{,}5; 4$.

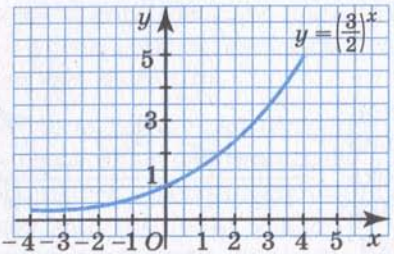


Рис. 24

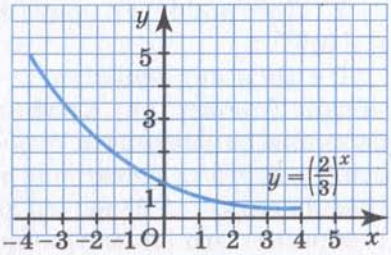


Рис. 25

100. По рисунку 24 установите, при каких значениях аргумента x значение функции $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ равно:

а) 0,25; б) 0,4; в) 0,5; г) 1,2; д) 1,5; е) 2,8; ё) 3,5.

101. По рисунку 25 установите, при каких значениях аргумента x значение функции $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ равно:

а) 0,25; б) 0,4; в) 0,5; г) 1,2; д) 1,5; е) 2,8; ё) 3,5.

102. Опишите свойства функции: а) $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$; б) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

103. С помощью калькулятора найдите с точностью до 10^{-4} значение функции $y=1{,}7^x$, если: а) $x=0{,}5$; б) $x=1{,}3$; в) $x=\sqrt{3}$.

104. Перерисуйте в тетрадь таблицу и заполните (с точностью до 10^{-5}).

x	−3,5	−2,5	−1,5	1,5	2,5	3
2^x						
$0{,}5^x$						

105. Возрастающей или убывающей является функция:

а) $y=0{,}7^x$; б) $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$; в) $y=-\pi^x$; г) $y=\left(\sqrt{5}-1\right)^x$;

д) $y=\left(\frac{9}{11}\right)^x$; е) $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^x$; ё) $y=2^{-x}$; ж) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^x$?

106. Сравните с единицей число:

а) $8^{-\sqrt{5}}$; б) $0{,}3^2$; в) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; г) $\left(\sqrt{2}\right)^3$;

д) $\left(\frac{e}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; е) $1{,}7^3$; ё) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}$; ж) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^e$.

107. Сравните числа:

а) $4^{-\sqrt{3}}$ и $4^{-\sqrt{2}}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; в) $\left(\frac{4}{5}\right)^{0,2}$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^{1,2}$;

г) $2^{\sqrt{3}}$ и $2^{1,7}$; д) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ и $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$; е) $5^{-0,2}$ и $5^{-1,2}$.

108. Проходит ли график функции $y = 4^x$ через точку A, если:
а) $A(4; 16)$; б) $A(4; 256)$; в) $A(-2; -0{,}5)$; г) $A(-2; 0{,}0625)$?

109. Проходит ли график функции $y = (\sqrt{3})^x$ через точку M, если:
а) $M(1; \sqrt{3})$; б) $M(\sqrt{3}; 3)$; в) $M(2; 3)$; г) $M(0; 0)$?

110. Найдите a, если известно, что график функции $y = a^x$ проходит через точку: а) $P(2; 9)$; б) $P(0{,}5; 0{,}2)$; в) $P(-1; 0{,}5)$.

111. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:
а) $y = 3^x$ на промежутке $[-1; 4]$;
б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ на промежутке $[-1; 4]$;
в) $y = 4^x$ на промежутке $[-0{,}5; 3]$;
г) $y = 0{,}25^x$ на промежутке $[-0{,}5; 3]$.

112. Постройте график функции:
а) $y = 3^x$; б) $y = 0{,}5^x$; в) $y = 3^{-x}$;
г) $y = -2^x$; д) $y = 2^{2x}$; е) $y = -2^{-2x}$.

Уровень Б

113. Найдите основание показательной функции $y = a^x$, если её график проходит через точку: а) $A(5; 32)$; б) $B(-1; 2)$; в) $C(-2; 4)$.

114. Существует ли показательная функция $y = a^x$, график которой проходит через точку: а) $A(1; 5)$; б) $B(2; 1)$; в) $O(0; 0)$; г) $C(0; 7)$?

115. Постройте график функции $y = 4 \cdot 2^{x-2}$. Является ли эта функция показательной? Опишите её свойства.

116. Постройте график функции $y = 0{,}5 \cdot 2^x$. Опишите её свойства.

117. Постройте график функции: а) $y = 1^x$; б) $y = 0^x$. Считают ли эти функции показательными?

118. Докажите, что график показательной функции $y = a^x$ не пересекает ось абсцисс, а ось ординат пересекает в одной и той же точке (при любом значении $a > 0$, $a \neq 1$).

119. Постройте график функции:

а) $y = 2^x - 3$; б) $y = 2 + 2^x$; в) $y = 2^{x-3}$;

г) $y = 2 \cdot 2^x$; д) $y = 2^x : 4$; е) $y = 2^{2x}$.

120. Найдите область значений функции:

а) $y = 3^x - 2$; б) $y = 0{,}5^x + 1$; в) $y = 2^{0{,}5x}$.

121. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = 25^x$ на промежутке:

а) $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$; б) $[-1; 0]$; в) $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$; г) $\left[-\frac{1}{4}; 2{,}5\right]$.

122. Решите графически уравнение:

а) $3^x = 4 - x$; б) $4^x + x = 5$; в) $2^{x+2} = 3x + 5$;

г) $0{,}5^x = \sqrt{x+5}$; д) $e^x = \sqrt{1-x}$; е) $\pi^x + x^{0{,}5} = 1$.

123. Решите графически неравенство:

а) $2^x > 4$; б) $0{,}5^x \geq 8$; в) $\left(\sqrt{2}\right)^x < 0{,}5$.

124. Могут ли пересекаться графики функций $y = 2^x$ и $y = 2^{x+1}$?

125. Используя свойство возрастания функции $y = 2^x$, решите уравнение и неравенства:

а) $2^x = 16$; $2^x > 16$; $2^x \leq 16$;

б) $2^x = 0{,}25$; $2^x \geq 0{,}25$; $2^x < 0{,}25$;

в) $2^x = \sqrt{32}$; $2^x \geq \sqrt{32}$; $2^x < \sqrt{32}$.

126. Используя свойство убывания функции $y = 0{,}2^x$, решите уравнение и неравенства:

а) $0{,}2^x = 0{,}04$; $0{,}2^x > 0{,}04$; $0{,}2^x \leq 0{,}04$;

б) $0{,}2^x = \frac{1}{625}$; $0{,}2^x \leq \frac{1}{625}$; $0{,}2^x > \frac{1}{625}$;

в) $0{,}2^x = 25$; $0{,}2^x > 25$; $0{,}2^x < 25$.

Решите уравнение (127—128).

127. а) $3^x = 81$; б) $5^{x+2} = 625$; в) $6^x = -2$; г) $7^{-x} = 1$.

128. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{9}{4}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -4$; г) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{x+3} = \frac{16}{25}$.

Решите неравенство (**129—130**).

129. а) $3^x > 1$; б) $5^{x-1} \le 125$; в) $5^x > -2$; г) $7^{-x} < 49$.

130. а) $0{,}5^x \le \frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} > \frac{9}{4}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < -4$; г) $\left(\frac{7}{5}\right)^{x+3} \le 1\frac{24}{25}$.

Уровень В

131. Энтомолог, изучая нашествие саранчи, исследовал, что площадь (в м^2), заражённая саранчой, изменяется по формуле $S_n = 1000 \cdot 2^{0{,}2n}$, где n — количество недель после заражения. Найдите: а) первоначальную площадь заражения; б) какая площадь была заражена через 5 недель; в) какая площадь была заражена через 10 недель?

132. Когда CD-проигрыватель выключают, то сила тока в нём уменьшается по формуле $I(t) = 24 \cdot (0{,}25)^t$ (ампер), где t — время в секундах. Найдите:

а) силу тока в момент отключения CD-проигрывателя;

б) $I(t)$, если $t = 1, 2, 3, 4$ (с);

в) как долго сила тока в выключенном CD-проигрывателе превышает 4 ампера (воспользуйтесь графиком зависимости $I(t) = 24 \cdot (0{,}25)^t$)?

133. Во время выращивания бактерий масса культуры изменяется по формуле $m(t) = 2 \cdot e^{\frac{t}{2}}$ (г), где t — время в часах, прошедшее с начала размножения. Найдите массу культуры через: а) 30 мин; б) 40 мин; в) 1 ч; г) 3 ч; д) 4 ч; е) 6 ч. Постройте соответствующий график.

Постройте график функции (**134—135**).

134. а) $y = |3^x - 1|$; б) $y = 2{,}5^{-|x|}$; в) $y = 3^{|x-1|}$; г) $y = 2^{|x|+x}$.

135. а) $y = |0{,}5^x - 2|$; б) $y = 0{,}2^{|x|}$; в) $y = (3^{|x-1|})^{-1}$; г) $y = -2^{|x|}$.

136. Изобразите схематически график функции:

а) $y = 0{,}5^{|x-2|+|x+2|}$; б) $y = 3^{|x-1|+|x+3|}$; в) $y = 2^{|x-2|+|x+1|}$;

г) $y = \frac{2^{2x}-4}{2^x+2}$; д) $y = \frac{9^x-1}{3^x-1}$; е) $y = \frac{4^{2x}+2\cdot 4^x}{4^x+2}$.

137. Найдите:

а) наименьшее значение функции $y = 0{,}25^{\sqrt{6}\cos 5x+\sqrt{3}\sin 5x-3}$;

б) наибольшее значение функции $y = 5^{3\sin 2x + 4\cos 2x + 4}$.

138. Установите, сколько общих точек (в зависимости от значения параметра a) имеют графики уравнений $2^{2x-1} - 2^{y-1} = 2^{2y-2x}$ и $|x| + |y| = a$.

Упражнения для повторения

139. В геометрической прогрессии $b_1 = 0{,}25$, $q = 2$. Найдите b_{10} и S_{10}.

140. Исследуйте на чётность функцию:

а) $y = 1 - \cos x$; б) $y = 2\sin(x - 1)$;

в) $y = x + \frac{1}{x}$; г) $y = \sqrt{|2x|}$.

141. Постройте график функции и определите её основные свойства:

а) $y = x^2 - 2x - 1$; б) $y = 1 + 4x - x^2$;

в) $y = 4x^2 - 4x + 5$; г) $y = 5x^2 + 10x + 4$.

§ 4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Уравнение называется *показательным*, если его переменные входят только в показатели степеней.

Примеры.

$$9^x = \sqrt{3},\ 4^x + 2^{x+1} = 3,\ \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 2.$$

Существует много видов показательных уравнений и различных подходов к их решению. Основными методами решения показательных уравнений являются:

I. Метод приведения обеих частей уравнения к степеням с одинаковыми основаниями.

II. Метод введения новой переменной.

III. Функционально-графический метод.

Рассмотрим каждый из этих методов подробнее.

I. Метод приведения обеих частей уравнения к степеням с одинаковыми основаниями применяется в двучленных уравне-

ниях, которые можно свести к виду $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$. Такие уравнения решаются на основе монотонности показательной функции.

Если $a > 0$, $a \neq 1$, то уравнения $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ и $f(x) = \varphi(x)$ — равносильны.

Пример 1. Решите уравнение: а) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 3\frac{3}{8}$; б) $3^x = 7^x$.

Решение. а) Представим правую часть уравнения в виде неправильной дроби: $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{27}{8}$.

Запишем правую и левую части уравнения в виде степени с основанием $\frac{2}{3}$. Получим: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, отсюда $2x = -3$, $x = -1{,}5$.

б) Поскольку $7^x > 0$, разделим обе части уравнения $3^x = 7^x$ на 7^x. Получим: $\frac{3^x}{7^x} = 1$, или $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$. Запишем число 1 в виде степени с основанием $\frac{3}{7}$, тогда $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^0$, отсюда $x = 0$.

Существуют двучленные уравнения, члены которых вы пока не можете свести к степеням с одинаковыми основаниями. В общем виде их можно записать так: $a^{f(x)} = b$, где $b \neq a^{\varphi(x)}$.

Если $b \leq 0$, то уравнение решений не имеет, поскольку показательная функция принимает только положительные значения.

Если $b > 0$, то уравнение имеет одно решение, поскольку прямая $y = b$ $(b > 0)$ всегда пересекает график показательной функции. Как записать такое решение, например уравнения $3^x = 1{,}5$ (*рис. 26*), вы узнаете позже.

II. Методом введения новой переменной решаются многие виды уравнений. Рассмотрим решение некоторых из них на конкретных примерах.

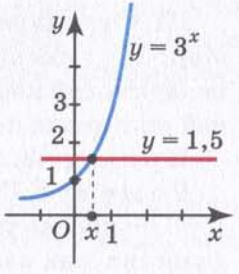


Рис. 26

Пример 2. Решите уравнение:

а) $2^{5x} + 2^{5x-1} + 2^{5x-2} + 2^{5x-3} = 120$;

б) $5^{2x} - 5^x = 600$; в) $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$.

Решение. а) В показателе каждой степени этого уравнения содержится одно и то же выражение $5x$. Обозначим наименьший

показатель степени буквой t ($5x-3=t$). Тогда уравнение будет иметь вид:

$$2^{t+3}+2^{t+2}+2^{t+1}+2^t=120, \text{ или}$$
$$2^t\cdot 2^3+2^t\cdot 2^2+2^t\cdot 2^1+2^t=120.$$

Вынесем общий множитель 2^t за скобки. Получим:

$2^t(2^3+2^2+2^1+1)=120$, или $2^t\cdot 15=120$. Отсюда $2^t=8$, или $2^t=2^3$. Следовательно, $t=3$. Поскольку $t=5x-3$, то $5x-3=3$, отсюда $x=1{,}2$.

Решая такие уравнения, не обязательно вводить новую переменную, а можно сразу выносить общий множитель за скобки.

$2^{5x-3}(2^3+2^2+2+1)=120$, или $2^{5x-3}\cdot 15=120$.

Отсюда $2^{5x-3}=8$, $2^{5x-3}=2^3$, $x=1{,}2$.

Именно поэтому этот способ называют *способом вынесения общего множителя за скобки.*

б) Пусть $5^x=y$, тогда $5^{2x}=y^2$. Подставим y в данное уравнение. Имеем: $y^2-y=600$, или $y^2-y-600=0$. Корни последнего уравнения: $y_1=-24$; $y_2=25$ (проверьте).

Поскольку $y=5^x>0$, то $y_1=-24$ — посторонний корень. Если $y=25$, то $5^x=25$, или $5^x=5^2$. Следовательно, $x=2$.

в) Запишем данное уравнение в виде $3^{3x}+2^{2x}\cdot 3^x-2\cdot 2^{3x}=0$. Разделим каждый член уравнения на 2^{3x}. Получим:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-2=0. \text{ Пусть } \left(\frac{3}{2}\right)^{x}=y\,(y>0), \text{ тогда } y^3+y-2=0.$$

Поскольку $y^3+y-2=y^3-1+y-1=(y-1)(y^2+y+2)$, то уравнение $y^3+y-2=0$ имеет один корень $y=1$. Следовательно,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=1, \text{ или } \left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{0}, \text{ отсюда } x=0.$$

III. Функционально-графический метод состоит в следующем: 1) с помощью построения графиков (или путём подбора) находят один корень уравнения; 2) доказывают, что других корней уравнение не имеет.

Пример 3. Решите уравнение: а) $1{,}5^x=1+0{,}5^x$.

Решение. Графически или методом проб убеждаемся, что $x=1$ — корень уравнения. Поскольку $y=0{,}5^x$ — возрастающая функция, так как $1{,}5>1$, а $y=1+0{,}5^x$ — убывающая ($0{,}5<1$), то других корней уравнение не имеет.

Если в показательном уравнении знак равенства изменить на знак неравенства, то получим показательное неравенство.

Неравенство называется *показательным*, если его переменные входят только в показатели степеней.

Для решения показательных неравенств используют те же методы, что и для решения показательных уравнений. А также правила решения простейших показательных неравенств, т.е. неравенств вида $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ или $a^{f(x)} \geq a^{\varphi(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Решая простейшие показательные неравенства, используют монотонность (возрастание или убывание) показательной функции. А именно:

1. Если $a > 1$ и $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, то $f(x) > \varphi(x)$.

2. Если $0 < a < 1$ и $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, то $f(x) < \varphi(x)$.

Пример 4. Решите неравенство:

а) $2^x \cdot 3^x > 36$; б) $3 \cdot 7^{2x} - 2 \cdot 7^x - 1 < 0$.

Решение. а) Представим правую и левую части неравенства в виде степени с основанием 6:

$$6^x > 6^2.$$

Поскольку $6 > 1$, то $x > 2$, или $x \in (2; \infty)$.

б) Пусть $7^x = y$, тогда $7^{2x} = y^2$. Подставим y в данное неравенство. Получим: $3y^2 - 2y - 1 < 0$. Поскольку квадратный трёхчлен $3y^2 - 2y - 1$ имеет корни $-\frac{1}{3}$ и 1, то множеством решений соответствующего неравенства будет: $-\frac{1}{3} < y < 1$, или $\begin{cases} y < 1, \\ y > -\frac{1}{3}. \end{cases}$

Поскольку $y = 7^x > 0$, то условие $y > -\frac{1}{3}$ выполняется всегда. Если $y < 1$, то $7^x < 1$, или $7^x < 7^0$. Следовательно, $x < 0$, или $x \in (-\infty; 0)$.

Показательные уравнения и неравенства — отдельный вид трансцендентных уравнений и неравенств. Вы уже знаете, что к трансцендентным относятся тригонометрические уравнения и неравенства. Трансцендентными считают также уравнения и неравенства, в которых сочетаются трансцендентные выражения с алгебраическими:

$$5^{x+1} + 5x > 10, \qquad 2^x = \sqrt{x+2}, \qquad \pi^x - 1 = \sin x.$$

Только для некоторых из подобных уравнений можно указать точные решения. Их приближённые корни находят в основном графическим способом.

Уравнения вида $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{\psi(x)}$, где $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функции переменной x, называются *показательно-степенными*.

Их решают, проверяя, не будут ли решениями данного уравнения корни уравнений:

$$f(x) = 1,\ f(x) = -1,\ f(x) = 0,\ \varphi(x) = \psi(x).$$

Полученные таким образом корни подлежат проверке.

Пример 5. Решите уравнение $x^{1-x} = x^{x+2}$.

Решение. 1) Подставим $x = 1$ в данное уравнение. Имеем: $1^0 = 1^3$, или $1 = 1$. Следовательно, $x = 1$ — корень данного уравнения.

2) Если $x = 0$, то имеем правильное равенство $0^1 = 0^2$. Следовательно, $x = 0$ — корень данного уравнения.

3) Если $x = -1$, получим равенство $(-1)^2 = (-1)^1$, или $1 = -1$. Равенство неправильное, следовательно, $x = -1$ — посторонний корень.

4) Решим уравнение $1 - x = x + 2$.

Его корень $x = -0{,}5 < 0$. Это посторонний корень, так как $(-0{,}5)^{1{,}5}$ не существует.

Ответ. 0; 1.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Какие уравнения называют показательными? Приведите примеры.
2. Какие неравенства называют показательными? Приведите примеры.
3. Сколько решений может иметь уравнение $a^x = b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$?
4. Какие методы решения показательных уравнений вы знаете?
5. Какие неравенства называют простейшими показательными неравенствами?
6. Как решают простейшие показательные неравенства?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Решите уравнение $4^{x-5} = 8^{2x}$.

Решение. Запишем правую и левую части как степени числа 2: $(2^2)^{x-5} = (2^3)^{2x}$, или $2^{2x-10} = 2^{6x}$. Отсюда $2x - 10 = 6x$, $4x = -10$, $x = -2{,}5$.

2. Решите неравенство $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} \geq 75$.

Решение. Запишем неравенство в виде $3^x \cdot 3 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} \geq 75$, или $3 \cdot 3^x - \frac{2}{9} \cdot 3^x \geq 75$. Вынесем 3^x за скобки и упростим полученное неравенство: $3^x \cdot \left(3 - \frac{2}{9}\right) \geq 75$, $3^x \cdot \frac{25}{9} \geq 75$, $3^x \geq 27$, $x \geq 3$, или $x \in [3; \infty)$.

3. Решите уравнение $3^{2x+1}+4\cdot 15^x=3\cdot 5^{2x+1}$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение в виде

$$3\cdot 3^{2x}+4\cdot 3^x\cdot 5^x=15\cdot 5^{2x}.$$

Разделим левую и правую части уравнения на 5^{2x}. Имеем:

$$3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}+4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x}=15.$$

Обозначим $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}=y\ (y>0)$ и подставим y в данное уравнение.

Получим: $3y^2+4y-15=0$, отсюда $y_1=\frac{5}{3}$, $y_2=-3$ (посторонний корень).

Если $y_1=\frac{5}{3}$, то $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}=\frac{5}{3}$, або $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$. Следовательно, $x=-1$.

4. Решите уравнение $\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^{x}+\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{x}=6$.

Р е ш е н и е. Найдём произведение оснований степеней:

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)\left(3+\sqrt{8}\right)}=\sqrt{9-8}=1.$$

То есть $\sqrt{3-\sqrt{8}}=\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}$.

Обозначим $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{x}=y\ (y>0)$, тогда $\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^{x}=\frac{1}{y}$.

Перейдём к уравнению с переменной y:

$\frac{1}{y}+y=6$, или $y^2-6y+1=0$, отсюда $y_1=3+\sqrt{8}$, $y_2=3-\sqrt{8}$.

Получим:

$$\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{x}=3+\sqrt{8},\\ \left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{x}=3-\sqrt{8};\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x_1=2,\\ x_2=-2.\end{array}\right.$$

5. Решите графически неравенство $2^x < x + 1$.

Р е ш е н и е. Построим в одной системе координат графики функций $y = 2^x$ и $y = x + 1$ (*рис. 27*). Они пересекаются в точках $A\,(0;\ 1)$ и $B\,(1,\ 2)$ (проверьте подстановкой). Значения 2^x меньше соответствующих значений $x + 1$, если $0 < x < 1$.

О т в е т. $(0; 1)$.

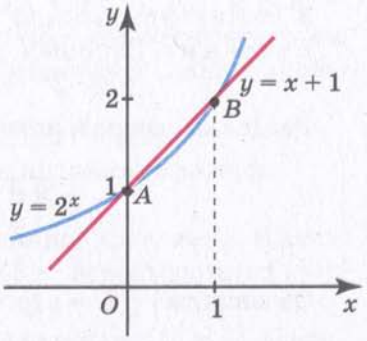


Рис. 27

Выполните устно

142. Сколько решений имеет уравнение:

а) $12^x = 3$; б) $1 + 2^x = 0$; в) $5^x = 0$; г) $3^{2x} = 4$?

143. Имеет ли решения неравенство:

а) $10^x > 10$; б) $7^x < -9$; в) $5^x \le 0{,}5$; г) $5^x > -5$; д) $4^x \le 0$?

144. Решите уравнение:

а) $3^x = 81$; б) $7^x = 1$; в) $5^x = 625$; г) $6^x = -2$; д) $4^{-x} = 16$.

145. Решите неравенство:

а) $3^x > 1$; б) $7^x < 49$; в) $5^x \le 125$; г) $15^x > -2$; д) $4^x \le 0{,}25$.

Уровень А

Решите уравнение (**146—149**).

146. а) $4^{x-2} = 2$; б) $9^{3-x} = \sqrt{3}$; в) $5^{2x-1} = 125$.

147. а) $8^{2x-1} = 2\sqrt{2}$; б) $0{,}4^{2x+1} = 0{,}16$; в) $\left(\sqrt{7}\right)^{x+1} = 49$.

148. а) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{64}{27}$; б) $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$; в) $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{25}\right)^x = \frac{27}{250}$.

149. а) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} = 3^{5x-1}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} = 2^{4x-1}$;

в) $\left(\frac{5}{6}\right)^{1-2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{2-x}$; г) $\left(\frac{7}{3}\right)^{3-2x} = \left(\frac{3}{7}\right)^{4+3x}$.

Решите уравнения и неравенства (150—151).

150. а) $2^{x+1}=16$; $2^{x+1}\geq 16$; б) $3^{2-x}=27$; $3^{2-x}<27$;
в) $4^{x-1}=32$; $4^{x-1}\leq 32$; г) $8^{x+2}=128$; $8^{x+2}>128$.

151. а) $9^{-x}=27$; $9^{-x}>27$; б) $8^{-x}=16$; $8^{-x}\leq 16$;
в) $3^{8-2x}=1$; $3^{8-2x}<1$; г) $4^{8+5x}=1$; $4^{8+5x}>1$.

Решите уравнение, используя способ вынесения общего множителя за скобки (152—153).

152. а) $3^{x+1}+3^{x}=108$; б) $2^{x+2}+2^{x}=5$;
в) $2^{x}-2^{x-2}=12$; г) $3^{x+2}+3^{x+1}+3^{x}=39$.

153. а) $2\cdot 3^{x+1}+3^{x+3}=33$; б) $5^{x+2}+11\cdot 5^{x}=180$;
в) $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-2}=75$; г) $5\cdot 0{,}5^{x-3}+0{,}5^{x+1}=162$.

Решите уравнение заменой переменной (154—156).

154. а) $6^{2x}-4\cdot 6^{x}-12=0$; б) $64^{x}-8^{x}-56=0$;
в) $9^{x}-8\cdot 3^{x}=9$; г) $7^{2x}+7=8\cdot 7^{x}$.

155. а) $2^{2x}-3\cdot 2^{x}+2=0$; б) $3^{2x}-2\cdot 3^{x}-3=0$;
в) $9^{x}-6\cdot 3^{x}-27=0$; г) $4^{x}-14\cdot 2^{x}-32=0$.

156. а) $100^{x}-11\cdot 10^{x}+10=0$; б) $4^{x}-9\cdot 2^{x}+8=0$;
в) $5^{2x}-3\cdot 5^{x}-10=0$; г) $3^{2x}-12\cdot 3^{x}+27=0$.

Решите неравенство (157—160).

157. а) $2^{x}<32$; б) $0{,}2^{x}>0{,}008$; в) $10^{x}<0{,}001$.

158. а) $5^{2x}<25^{x+1}$; б) $0{,}1^{3x}<0{,}1^{2x-3}$; в) $\pi^{x}<\pi^{2+3x}$.

159. а) $3^{x+2}-3^{x}<8$; б) $3^{x+2}+3^{x-1}<28$.

160. а) $5^{x+1}+5^{x}>150$; б) $2\cdot 3^{x+1}-3^{x}<15$.

Уровень Б

161. При каких значениях переменной значение выражения:
1) равно единице; 2) не превышает единицу:

а) $0{,}3^{x^2-x}$; б) 7^{x^2-4}; в) $5^{x(x+3)}$; г) $0{,}5^{x^2-3x+2}$; д) $4^{\sqrt{x}-1}$?

162. При каких значениях переменной значение выражения:
1) равно единице; 2) не меньше единицы:

а) π^{x^2-9}; б) $\sqrt{5}^{x^2+x}$; в) $0{,}1^{x(x+3)}$; г) $(\pi-e)^{\sqrt{x}}$; д) $3^{\sqrt{x}-x}$?

Решите уравнение (163—169).

163. а) $0{,}5^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=\dfrac{1}{64}$; б) $2^{x^2-6x+0{,}5}=\dfrac{1}{16\sqrt{2}}$;

в) $16\cdot\sqrt[5]{8^{x^2-3x-5}}=128$; г) $\dfrac{1}{27}\cdot\sqrt[4]{9^{3x-1}}=27^{-\frac{2}{3}}$.

164. а) $8^{x+1}=5^{x+1}$; б) $13^{x-3}-11^{3-x}=0$;
в) $5^x\cdot 2^{2x}=400$; г) $2^x\cdot 3^{2x}=324$.

165. а) $2^{x+1}+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^x+6=0$;
б) $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}-4\cdot 3^{x-2}=17$;
в) $7^{3x+3}+7^{3x+2}+7^{3x+1}=57$;
г) $4^{4x-1}+4^{4x-2}+4^{4x-3}=168$.

166. а) $2^{3x}-6\cdot 2^{2x}+12\cdot 2^x-8=0$;
б) $3^{3x+1}-4\cdot 27^{x-1}+9^{1,5x-1}-80=0$;
в) $2^{x-1}-3^x=3^{x-1}-2^{x+2}$;
г) $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0$;
д) $3^{3x+3}-3^{3x+2}-3^{3x+1}+3^{3x}=432$;
е) $3^{x+2}+3^{x+1}+3^x=4^{x+2}-4^{x+1}+4^x$.

167. а) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; б) $8+2^{1+\sqrt{x}}=4^{\sqrt{x}}$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}+3=10\cdot 3^{-x}$; г) $6+5\cdot 6^{-x}=\left(\frac{1}{36}\right)^x$.

168. а) $4^{\sqrt{x+1}}-2^{2+\sqrt{x+1}}=0$; б) $(2^x+10)\cdot 2^{x-2}=36$;

в) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$; г) $2^{1+\sqrt{x-4}}-5\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{x-4}}+2=0$.

169. а) $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$; б) $3^{2x+4}+45\cdot 6^x=9\cdot 2^{2x+2}$;
в) $18^x-8\cdot 6^x-9\cdot 2^x=0$; г) $12^x-6^{x+1}+8\cdot 3^x=0$.

Решите неравенство (**170—172**).

170. а) $3^{x+0,5}\cdot 3^{x-2}\geq 3$; б) $0,5^{x+7}\cdot 0,5^{1-2x}\leq 2$;

в) $8^x\cdot 4^{x+13}<\frac{1}{16}$; г) $2^{x-2}\cdot 4^{1+x}>\frac{1}{8}$.

171. а) $13^{2x+1}-13^x<12$; б) $3^{2x+1}>10\cdot 3^x-3$;
в) $9^x+3^{x+1}>108$; г) $4^x+2^{x+1}>80$.

172. а) $5^x-24\leq\frac{25}{5^x}$; б) $2^x+\frac{8}{2^x}\leq 16,5$.

Уровень В

Решите уравнение (**173—176**).

173. а) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{4}}+\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{4}}=34$; б) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$.

174. а) $\left(\sqrt{3+\sqrt{10}}\right)^x-\left(\sqrt{\sqrt{10}-3}\right)^x=6$; б) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2$.

175. а) $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}$;

б) $3^{2x^2}+3^{2x+12}=2\cdot 3^{x^2+x+6}$;

в) $3^{1-x}\cdot 2^{2x}+7\cdot 2^x=6\cdot 3^x$;

г) $27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^x-2^{3x}-27\cdot 2^{-x}=8$.

176. а) $3^{2x}-\dfrac{18}{3^{2x}}-\left(3^x+\dfrac{6}{3^x}\right)=2$; б) $2^{3x}-\dfrac{8}{2^{3x}}-6\cdot 2^x+\dfrac{6}{2^{x-1}}=1$;

в) $5^{3x}+9\cdot 5^x+27\,(5^{-3x}+5^{-x})=27$;

г) $3^{2x}-12\cdot 3^{-2x}-2(3^x+3^{-x})=1$.

Решите неравенство (**177—179**).

177. а) $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{3^{3x+1}}}\geq\sqrt[2x+5]{9^{x+5}}$; б) $\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{(0,2)^{3x-1}}}\leq\sqrt[3x-7]{125^{3-x}}$;

в) $(\cos 6)^{3x-x^2}\leq 1-\sin^2 6$; г) $(\sin 2)^{x^2-5x+8}\geq 0{,}5(1-\cos 4)$.

178. а) $5^{x+0,5}-9^x\geq 9^{x-1}-5^{x-0,5}$; б) $\dfrac{x^2+3x-4}{4^x+2^{x+1}-80}\geq 0$;

в) $\dfrac{1}{3}\cdot 9^{x+1}+3\cdot 4^{x-1}+\dfrac{1}{2}\cdot 9^x\leq 6\cdot 4^x$; г) $\dfrac{5^{2x+1}-5^x-4}{x^2+4x-5}\leq 0$.

179. а) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x\geq 10$; б) $4\cdot 4^x-6^x<18\cdot 9^x$;

в) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x\leq 14$; г) $2^{2x+1}>5\cdot 6^x-3^{2x+1}$.

Решите графически неравенство (**180—181**).

180. а) $2^x\leq\dfrac{3+x}{x+1}$; б) $0{,}5^x\geq\sqrt{x+3}$; в) $3^x+x^2>4$.

181. а) $e^x+1>\sin x$; б) $3^{x-1}<x^{-1}$; в) $(x-1)^2+2^x>2$.

182. Найдите целые решения неравенства:

а) $0{,}04<0{,}2^x<125$; б) $0{,}1<2^{x+3}<10$;

в) $0{,}1<\pi^x<10$; г) $0{,}1\leq e^x<10$.

183. Решите уравнение:

а) $x^{x+1}=x^{x^2-1}$; б) $(x-1)^x=(x-1)^{\frac{1}{3}}$; в) $(x-2)^{10x^2}=(x-2)^{3x-1}$.

Решите систему уравнений (184—185).

184. а) $\begin{cases} 3^{x+y} = 27, \\ 4^{x-y} = 0{,}25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{2x-y} = 3, \\ 2^x + 2^y = 12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6^{3x-y} = \sqrt{6}, \\ 2^{y-2x} = \sqrt{2^{-1}}. \end{cases}$

185. а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 4^x + 4^y = 80; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{2x} + 2^x \cdot y = 10, \\ y^2 + y \cdot 2^x = 15; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 7^{2x} - 7^x \cdot y = 28, \\ y^2 - y \cdot 7^x = -12. \end{cases}$

186. Металлический шарик, температура которого 120 °С, поместили в помещение с температурой 20 °С. Через сколько минут температура шарика будет составлять 84 °С, если закон охлаждения тела выражается формулой $D = D_0 \cdot b^{kt}$, где D — разность между температурой охлаждающегося тела и температурой окружающей среды; D_0 — начальная разность температур тела и среды; t — время (в минутах), b и k — постоянные величины, которые зависят от формы тела и материала? Для данного тела $b = 0{,}8$, $k = 0{,}1$.

187. Формула выведения медицинских препаратов из организма имеет вид $c = c_0 e^{-kt}$, где c — концентрация медицинского препарата в организме через t ч, c_0 — начальная концентрация препарата. Найдите приблизительное время, за которое концентрация медицинского препарата в организме человека уменьшится на 20 %, если коэффициент k выведения данного препарата из организма равен 2.

Упражнения для повторения

188. Для перечисленных ниже функций запишите обратные и постройте их графики:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = x^3$;

в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = \operatorname{tg} x$.

189. Упростите выражение:

а) $9^{1+\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 3^{-2-\sqrt{3}}$; б) $\left(25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}\right) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}$;

в) $4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}}$; г) $\left(2^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$.

190. При каком условии положенный в банк под простые проценты капитал увеличится на 44 % через два года?

§ 5. ЛОГАРИФМЫ И ИХ СВОЙСТВА

В предыдущем параграфе вы находили корни уравнения вида $a^x = b$. Например: $2^x = 4$, $x = 2$; $2^x = 8$, $x = 3$. А какой корень имеет уравнение $2^x = 5$? Графическим методом можно убедиться, что оно имеет единственное решение (*рис. 28*). Это число больше 2 и меньше 3, но как его записать?

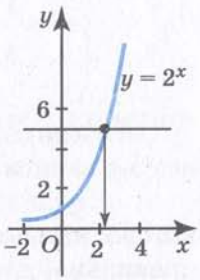


Рис. 28

Для записи корней показательного уравнения используют понятие «логарифм» и соответствующий символ. Корнем уравнения $2^x = 5$ является число, которое записывают в виде $\log_2 5$ и читают «логарифм числа 5 по основанию 2».

Рассмотрим общий случай:

Пусть a и α — действительные числа; $a > 0$, $a \neq 1$. Если $a^\alpha = b$, то число α называют *логарифмом* числа b по основанию a.

Логарифмом числа b по основанию a ($a > 0$ и $a \neq 1$) называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить b.

Логарифм числа b по основанию a обозначают символом $\log_a b$.

Примеры: $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$;

$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$, так как $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$; $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$, так как $\left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$.

Основанием логарифма может быть произвольное положительное число, кроме единицы. Как известно, если $a > 0$ и $a \neq 1$, то область определения показательной функции $y = a^x$ — множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, а область значений — множество всех положительных действительных чисел. Поэтому при таких значениях a для любого положительного числа b найдётся такое α, что $a^\alpha = b$. Другими словами: при любом основании a, где $a > 0$ и $a \neq 1$, существует логарифм каждого положительного числа. *Логарифм отрицательного числа и нуля не существует.*

Полезно помнить, что для каждого $a > 0$ и $a \neq 1$

$$\log_a 1 = 0 \text{ и } \log_a a = 1 \text{ (почему?).}$$

Нахождение логарифма числа называют *логарифмированием*. Эта операция обратная к операции возведения в степень с соответствующим основанием.

Возведение в степень	Логарифмирование
$2^5 = 32$	$\log_2 32 = 5$
$\left(\sqrt{5}\right)^4 = 25$	$\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$
$0{,}1^3 = 0{,}001$	$\log_{0,1} 0{,}001 = 3$

Согласно определению логарифма, если $a^{\alpha} = b$, то $\alpha = \log_a b$. Это разные записи одной зависимости. Из них следует равенство

$$a^{\log_a b} = b,$$

которое называют *основным логарифмическим тождеством*. Оно правильное для любых положительных a и b ($a \neq 1$).

Например: $2^{\log_2 32} = 32$; $\left(\sqrt{5}\right)^{\log_{\sqrt{5}} 25} = 25$;

$0{,}1^{\log_{0,1} 0{,}001} = 0{,}001$.

С помощью основного логарифмического тождества любое положительное число можно представить в виде степени, имеющей заданное основание.

Например: $7 = 5^{\log_5 7}$; $7 = 12^{\log_{12} 7}$; $7 = 0{,}5^{\log_{0,5} 7}$.

Докажем ещё несколько важных свойств логарифмов (для положительных x, y, a, $a \neq 1$ и $p \in R$):

$$1)\ \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y;$$

$$2)\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$3)\ \log_a x^p = p \cdot \log_a x.$$

1) По основному логарифмическому тождеству и основному свойству степени

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Итак, $\log_a x + \log_a y$ — показатель, в который нужно возвести число a, чтобы получить xy, то есть

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Эту формулу можно обобщить на три и более множителя:

$$\log_a (xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z.$$

Кратко говорят: *логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей.*

2) Доказательство аналогичное предыдущему:

$$\frac{x}{y} = a^{\log_a x} : a^{\log_a y} = a^{\log_a x - \log_a y},$$

отсюда

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y .$$

Кратко говорят: *логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя.*

3) Возведём обе части тождества $x = a^{\log_a x}$ в степень p:

$$x^p = \left(a^{\log_a x}\right)^p = a^{p\log_a x} .$$

Итак,

$$\log_a x^p = p \log_a x.$$

Доказанные формулы можно использовать и справа налево, например:

$$\log_{12} 3 + \log_{12} 4 = \log_{12} 3 \cdot 4 = \log_{12} 12 = 1;$$

$$\log_5 50 - \log_5 2 = \log_5 \frac{50}{2} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2.$$

В логарифмах переходить от одного основания к другому можно при помощи *формулы перехода*

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$.

Докажем эту формулу. Поскольку положительные числа x и $a^{\log_a x}$ равны, то равны и их логарифмы по основанию b. Поэтому

$$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x}) = \log_a x \cdot \log_b a,$$

откуда и следует доказываемая формула.

О б р а т и т е в н и м а н и е! Как следствия из формулы перехода можно получить следующие формулы:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \qquad \log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b.$$

Докажите их самостоятельно.

П р и м е р 1. Упростите выражение $\log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9$.

Р е ш е н и е. Сведём все логарифмы к основанию 5. Имеем:

$$\log_5 6 \cdot \frac{\log_5 7}{\log_5 6} \cdot \frac{\log_5 8}{\log_5 7} \cdot \frac{\log_5 9}{\log_5 8} = \log_5 9.$$

Особенно часто используют логарифмы по основаниям 10 и e, их называют *десятичными* и *натуральными логарифмами*. Вместо $\log_{10} a$ и $\log_e a$ пишут соответственно $\lg a$ и $\ln a$.

Рассмотренные в параграфе свойства логарифмов правильные при условии, что переменные принимают положительные значения. С помощью модуля можно расширить использование некоторых формул. Например:

$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|$, $n \in \mathbf{Z}$, $a > 0$, $a \neq 1$;

$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$, $xy > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Для преобразования выражений, решения уравнений и неравенств используют и другие формулы, содержащие логарифмы:

$$\log_{a^\alpha} x^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a x; \qquad a^{\log_c b} = b^{\log_c a}.$$

Докажите их самостоятельно.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое логарифм числа a по основанию b? Как его записывают?
2. Каким может быть основание логарифма?
3. Существует ли логарифм отрицательного числа? А нуля?
4. Какое равенство называют основным логарифмическим тождеством?
5. Чему равен логарифм произведения? А частного?
6. Какие логарифмы называют десятичными? А натуральными? Как их записывают?
7. Какое равенство называют формулой перехода?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Вычислите: а) $25^{1-0{,}5\log_5 10}$; б) $3\lg 5 + 0{,}5\lg 64$; в) $81^{\frac{1}{\log_5 3}}$.

Решение.

а) $25^{1-0{,}5\log_5 10} = 25 : (25^{0{,}5})^{\log_5 10} = 25 : 5^{\log_5 10} = 25 : 10 = 2{,}5$;

б) $3\lg 5 + 0{,}5\lg 64 = \lg 5^3 + \lg 64^{0{,}5} = \lg 125 + \lg 8 = \lg 1000 = 3$;

в) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} = \left(3^4\right)^{\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^4 = 5^4 = 625$.

2. Решите уравнение: $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$.

Решение. Пусть $3^x = y$, тогда $3^{2x} = y^2$. Подставим y в данное уравнение.

Получим: $y^2 - 5y + 6 = 0$, отсюда $y_1 = 2$; $y_2 = 3$.

Поскольку $y = 3^x$, то $3^x = 2$, $x = \log_3 2$, или $3^x = 3$, $x = 1$.

Ответ. $1; \log_3 2$.

3. Найдите x из равенства:

$$\log_{0,3} x = 0{,}5 \log_{0,3} a - 2 \log_{0,3} b + \log_{0,3} c.$$

Решение. $\log_{0,3} x = 0{,}5 \log_{0,3} a - 2 \log_{0,3} b + \log_{0,3} c =$

$$= \log_{0,3} a^{0,5} - \log_{0,3} b^2 + \log_{0,3} c = \log_{0,3} \frac{\sqrt{ac}}{b^2}.$$

Поскольку $\log_{0,3} x = \log_{0,3} \frac{\sqrt{ac}}{b^2}$, то $x = \frac{\sqrt{ac}}{b^2}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{ac}}{b^2}$.

4. Вычислите $\log_6 16$, если $\log_{12} 2 = a$.

Решение.

$$\log_6 16 = \frac{\log_{12} 16}{\log_{12} 6} = \frac{\log_{12} 2^4}{\log_{12} (12:2)} = \frac{4 \log_{12} 2}{\log_{12} 12 - \log_{12} 2} = \frac{4a}{1-a}.$$

Ответ. $\frac{4a}{1-a}$.

Выполните устно

Вычислите (191—194).

191. а) $\log_2 1$; б) $\log_2 32$; в) $\log_2 0{,}5$; г) $\log_2 4$; д) $\log_2 2$.

192. а) $\log_3 3$; б) $\log_3 81$; в) $\log_3 27$; г) $\log_3 1$; д) $\log_3 9$.

193. а) $\log_{0,5} 2$; б) $\log_{0,5} 1$; в) $\log_{0,5} 0{,}5$; г) $\log_{0,5} 4$; д) $\log_{0,5} 8$.

194. а) $\log_{25} 5$; б) $\log_{\sqrt{5}} 5$; в) $\log_3 \sqrt{3}$; г) $\lg 0{,}01$; д) $\log_{\sqrt{3}} 9$.

Решите уравнение (195—196).

195. а) $3^x = 8$; б) $7^x = 5$; в) $125^x = 6$; г) $4^x = 6$.

196. а) $\log_3 x = 2$; б) $\log_2 x = 5$; в) $\log_9 x = 0{,}5$; г) $\lg x = 3$.

197. Упростите выражение:

а) $3^{\log_3 x}$; б) $7^{\log_7 (y+1)}$; в) $3^{2\log_3 x}$; г) $49^{\log_7 (y+1)}$.

Найдите x (198—199).

198. а) $\log_2 x = \log_2 a + \log_2 c$; б) $\log_2 x = 2 \log_2 a + \log_2 c$.

199. а) $\log_a x = \log_a 15 - \log_a 3$; б) $\log_a x = 0{,}5 \log_a 64 - \log_a 4$.

Уровень А

200. Покажите, что:

а) $\log_2 16 = 4$; б) $\log_5 125 = 3$; в) $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$.

201. Запишите используя логарифм соотношение:

а) $5^4 = 625$; б) $9^{0,5} = 3$; в) $4^{1,5} = 8$;

г) $6^0 = 1$; д) $10^{-3} = 0,001$; е) $a^{3x} = c$.

202. Запишите используя показатель степени соотношение:

а) $\log_3 81 = 4$; б) $\log_2 64 = 6$; в) $\log_{64} 2 = \frac{1}{6}$;

г) $\log_4 x = 3$; д) $\log_5 2x = 2$; е) $\log_x 49 = 2$.

203. Верно ли равенство:

а) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$; б) $\log_{0,5} 4 = -2$; в) $\log_9 \sqrt{3} = 0,25$?

Вычислите (**204—206**).

204. а) $\log_4 64$; б) $\log_2 256$; в) $\log_2 0,25$; г) $\log_{25} 5$;

д) $\log_{10} 100\,000$; е) $\log_{10} 0,01$; ё) $\log_3 \sqrt{3}$; ж) $\log_2 8$.

205. а) $\log_2 64$; б) $\log_2 128$; в) $\log_5 25$; г) $\log_5 125$;

д) $\log_2 0,125$; е) $\log_9 3$; ё) $\log_4 16$; ж) $\log_{36} 6$.

206. а) $\lg 10\,000$; б) $\lg 0,001$; в) $\lg 10$; г) $\lg 0,1$;

д) $\lg \sqrt{10}$; е) $\lg \sqrt[3]{10}$; ё) $\lg \frac{1}{100}$; ж) $\lg 100^2$.

207. Вычислите значение выражения, воспользовавшись основным логарифмическим тождеством:

а) $3^{\log_3 25}$; б) $7^{\log_7 0,3}$; в) $3^{\log_3 1}$; г) $1,1^{\log_{1,1} 10}$;

д) $2^{\log_2 6}$; е) $3^{\log_3 3}$; ё) $4^{\log_4 16}$; ж) $0,5^{\log_{0,5} 7}$.

208. Упростите выражение. При каких значениях a это возможно?

а) $\log_a 8 + \log_a 2$; б) $\log_{2a} 8 - \log_{2a} 2$; в) $\log_{a+1} 40 - \log_{a+1} 5$;

г) $\log_a 4 + \log_a 5$; д) $\log_a 5 + \log_a 0,4$; е) $\log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 4$.

Представте выражение в виде логарифма (**209—210**).

209. а) $1 + \log_5 3$; б) $\log_5 4 - 1$; в) $\log_5 9 + \log_5 4 + \log_5 2$;

г) $2 + \log_5 2$; д) $\log_5 40 - 2$; е) $\log_5 6 - \log_5 2 - \log_5 3$.

210. а) $5\lg 2 + \lg 3$; б) $3\lg 4 - \lg 8$; в) $2\lg 3 + 3\lg 2$;

г) $2\lg 5 - 3\lg 2$; д) $\frac{1}{2}\lg 4 + \lg 3$; е) $\frac{1}{3}\lg 8 - 2\lg 2$.

211. Вычислите значение выражения:

а) $5^{\log_5 4} + 1$; б) $1,2^{\log_{1,2} 7} - 2$; в) $0,3^{\log_{0,3} 0,3} + 3$;

г) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$; д) $\lg 300 - \lg 3$; е) $\lg 50 - 2\lg \sqrt{5}$.

212. Вычислите, пользуясь микрокалькулятором:

а) $\lg 23$; б) $\ln 48$; в) $\lg 0,378$; г) $\lg 1,3$.

Решите уравнение (213—214).

213. а) $\log_2 x = 3$; б) $\log_{0,5} x = -2$; в) $\lg x = 3$.

214. а) $4^x = 5$; б) $6^x = 2$; в) $5^{x-1} = 8$.

215. По какому основанию логарифм числа 729 равен 6?

Уровень Б

216. Найдите логарифм по основанию 3 представленного ниже числа:

а) $\frac{1}{27}$; б) 729; в) $\sqrt[4]{9}$; г) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; д) $3^{\sqrt{3}}$.

217. Подайте числа -2; $-\sqrt{3}$; -1; $-0{,}5$; 0; 0,5; 1; $\sqrt{3}$; 2 в виде логарифмов по основанию: а) 5; б) 0,1; в) 11; г) 2,5; д) $\sqrt{5}$.

218. Найдите число, логарифм которого по основанию 5 равен:

а) 5; б) -1; в) 0; г) 0,5; д) $-\sqrt{4}$.

Вычислите (219—223).

219. а) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 27)$; б) $\log_3\left(\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{125}\right)$; в) $\log_6(3\log_2 4)^5$;

г) $\log_2\left(\log_5 \sqrt[8]{5}\right)$; д) $\log_4\left(\log_3 \sqrt{81}\right)$; е) $\lg(5\lg 100)^8$.

220. а) $2\log_{\sqrt{5}} 25 + \frac{1}{3}\log_2 64$; б) $4\log_6 216 - 2\log_{0,5}(\log_3 81)$;

в) $2\log_2 \frac{1}{4} + 3\log_{\frac{1}{3}} 27$; г) $5\log_{\frac{1}{5}} 625 + 8\log_4(\log_{16} 256)$.

221. а) $27^{-\log_3 2}$; б) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 \frac{1}{3}}$; в) $\left(\frac{1}{125}\right)^{\log_5 10}$;

г) $2^{2+\log_2 5}$; д) $3^{2+\log_3 10}$; е) $5^{2-\log_5 10}$.

222. а) $25^{1-\log_{25} 15}$; б) $5 \cdot 3^{\log_3 4 - 1}$; в) $4 \cdot 5^{\log_5 10 - 2}$;

г) $27^{\log_3 6 - 1}$; д) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 3 + 1}$; е) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\lg \frac{1}{2} - 2}$.

223. а) $\frac{2}{5} \cdot \left(\log_3 81 + 16^{\log_4 3}\right)^{\log_{13} 25}$; б) $3^{\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 5}$;

в) $\frac{2}{3} \cdot \left(\lg 10 + 9^{\log_3 8}\right)^{\log_{65} 3}$; г) $9^{\log_9 2 + \log_5 \frac{1}{25}}$.

224. Зная, что $\log_a b = 8$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0)$, вычислите:

а) $\log_a ab$; б) $\log_a \frac{a}{b}$; в) $\log_a \frac{b}{a}$;

г) $\log_a (a^2 b)$; д) $\log_a \sqrt{ab}$; е) $\log_a (ab)^{\frac{2}{3}}$.

225. Известно, что $\log_b 2 = p, \log_b 3 = q, \log_b 5 = r (b > 0, b \neq 1)$. Найдите:

а) $\log_b 60$; б) $\log_b 108$; в) $\log_b 45$;

г) $\log_b \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$; д) $\log_b \left(\frac{5}{32}\right)$; е) $\log_b (0{,}2)$.

Найдите x из равенства (**226—227**).

226. а) $\log_3 27 + \log_3 \left(\frac{1}{3}\right) = \log_3 x$; б) $\log_5 x = \frac{1}{3}\log_5 8 - 2$;

в) $\log_5 125 - \log_5 \sqrt{5} = \log_5 x$; г) $\log_{20} x = 1 + \log_{20} 10$.

227. а) $\log_3 x = 3 - \log_3 2 - 2\log_3 5$;

б) $\log_7 x = 1 - 3\log_7 2 + \log_7 20$;

в) $\log_3 x = 2 - \frac{1}{2}\log_3 4 - \log_3 5$;

г) $\log_5 x = \log_5 \left(\frac{4}{3}\right) + \log_5 3 + \log_5 8$;

д) $\log_7 x = 3\log_7 2 + 0{,}5\log_7 25 - 2\log_7 2$;

е) $\ln x = 2\ln 5a + \ln b - 0{,}5\ln c - \ln a^2$.

Решите уравнение (**228—229**).

228. а) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$; б) $7^{2x+1} - 6 \cdot 49^x = 5$;

в) $2 \cdot 4^{x+1} + 10 = 3 \cdot 2^{x+3}$; г) $9^{x+1} + 6 = 189 \cdot 3^{x-2}$.

229. а) $9^x - 6 \cdot 3^x + 5 = 0$; б) $2 \cdot 5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 1 = 0$;

в) $15^{2x+1} - 15^x = 2$; г) $5^{x+2} - 5^x = 40$.

230. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\log_2 (3 - 5x)$; б) $\lg(9 - x^2)$; в) $\ln (x^2 - 2x)$;

г) $\lg \frac{2x+5}{x-1}$; д) $\log_3 |x|$; е) $\log_x (4 - x^2)$?

231. Вычислите:

а) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$;

б) $\lg 5 : (\log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9)$.

Уровень В

232. Прологарифмируйте обе части уравнения и найдите его корни:

а) $2^{x+1}=6$; б) $8^{x+1}=3^x$; в) $8^{x-2}=10^x$;

г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}=5^x$; д) $12^{x-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^x$; е) $3^x=\left(\frac{3}{8}\right)^{x+1}$.

233. Докажите, что если $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $n\neq 0$, то:

а) $\log_a b\cdot\log_b a=1$; б) $\log_{a^n} b^n=\log_a b$;

в) $a^{\lg b}=b^{\lg a}$; г) $\frac{\lg a}{\lg b}=\frac{\ln a}{\ln b}$.

234. Докажите, что:

а) $3^{\log_2 5}=5^{\log_2 3}$; б) $7^{\log_5 4}=4^{\log_5 7}$;

в) $\log_3 7+\log_7 3>2$; г) $7^{\log_{\frac{1}{7}} 5}=0{,}2$.

235. Выразите через a:

а) $\log_{49} 32$, если $\log_2 14=a$; б) $\log_{98} 28$, если $\log_2 7=a$.

236. Выразите через a и b:

а) $\log_{15} 49$, если $\log_7 9=a$, $\log_7 45=b$;

б) $\log_{30} 240$, если $\log_2 5=a$; $\log_2 3=b$.

237. Вычислите:

а) $\dfrac{\log_7\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\log_{49}\left(5+\sqrt{24}\right)}$; б) $7^{\log_3 5}-\log_{0,125}\sqrt[3]{4}-5^{\log_3 7}$;

в) $\log_2\log_3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)-\log_2\log_3\left(7+\sqrt{40}\right)$; г) $2^{\frac{\lg(\lg 2)}{\lg 2}}$;

д) $\lg(\sin 15^\circ)\cdot\lg(\sin 30^\circ)\cdot\lg(\sin 45^\circ)\cdot\ldots\cdot\lg(\sin 120^\circ)$;

е) $\lg(\operatorname{tg} 1^\circ)+\lg(\operatorname{tg} 2^\circ)+\ldots+\lg(\operatorname{tg} 89^\circ)$.

238. Упростите выражение, если $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$:

а) $\sqrt{\log_a b+\log_b a+2}\,(\log_a b-\log_{ab} b)\cdot\sqrt{\log_a b}$, $ab\neq 1$;

б) $\sqrt{6(\log_b a\log_{a^2} b+1)-\log_{\sqrt[3]{a}} b^2+\log_a^2 b}-\log_a b$, $a>1$.

239. Докажите неравенство:

а) $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}+\frac{1}{\lg\pi}>4$;

б) $\frac{\ln 1+\ln 2+\ln 3+\ln 4+\ln 5+\ln 6}{6}<\ln 3{,}5$.

Упражнения для повторения

240. Постройте график функции:

а) $y = 2^{x+1}$; б) $y = 2^x + 1$; в) $y = 2^{|x|}$; г) $y = |0{,}5^x - 1|$.

241. Решите неравенство:

а) $3^{2x} + 8 \cdot 9^x - 9 > 0$; б) $3 \cdot 2^{4x} - 16^x - 32 < 0$;

в) $5^{4x} - 25^{x+3} < 0$; г) $0{,}2^{x-5} - 0{,}04^x > 0$.

242. Из перевёрнутых 28 костяшек домино наугад берут одну. Какова вероятность того, что на ней окажется всего:

а) 2 очка (событие A); б) 5 очков (событие B)?

§ 6. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Как известно, если $a > 0$ и $a \neq 1$, то каждому положительному значению x соответствует единственное значение $\log_a x$. Поэтому равенство $y = \log_a x$ задаёт некоторую функцию с областью определения $(0; \infty)$.

Функцию, заданную формулой $y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$), называют *логарифмической функцией с основанием a*.

Примеры логарифмических функций: $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \ln x$.

Как связаны между собой функции $y = \log_a x$ и $y = a^x$?

Равенство $y = a^x$ выражает ту же зависимость между x и y, что и $x = \log_a y$; этим двум равенствам отвечает один и тот же график (*рис. 29*). Чтобы от равенства $x = \log_a y$ перейти к $y = \log_a x$, нужно поменять местами переменные x и y. Поэтому и на графике следует поменять местами оси Ox и Oy (*рис. 30*). Этот рисунок —

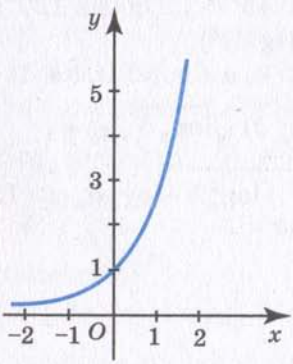


Рис. 29

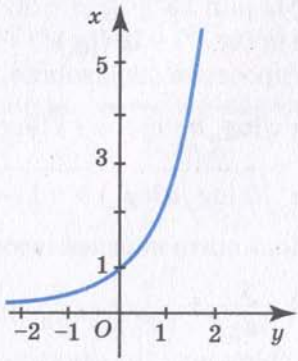


Рис. 30

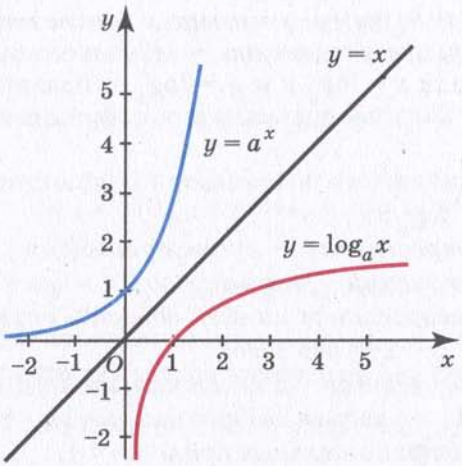


Рис. 31

график функции $y = \log_a x$, только его оси размещены не так, как принято. Чтобы изобразить график функции $y = \log_a x$ в общепринятой системе координат, нужно весь рисунок отразить симметрично относительно прямой $y = x$ (*рис. 31*).

Итак, *графики функций* $y = a^x$ *и* $y = \log_a x$, *построенные в одной системе координат, симметричны относительно прямой* $y = x$.

Последовательность описанных преобразований рассматриваемых функций для $0 < a < 1$ схематически изображена на рисунке 32.

Функции, графики которых симметричны относительно прямой $y = x$, являются *взаимно обратными*. В частности, функция $y = \log_a x$ обратная для функции $y = a^x$.

Если две функции взаимно обратные, то область определения одной из них является областью значений другой и наоборот.

Следует обратить внимание и на такое. *Если одна из двух взаимно обратных функций на всей области определения возрастает, то и другая возрастает.* Например, если функция $y = a^x$

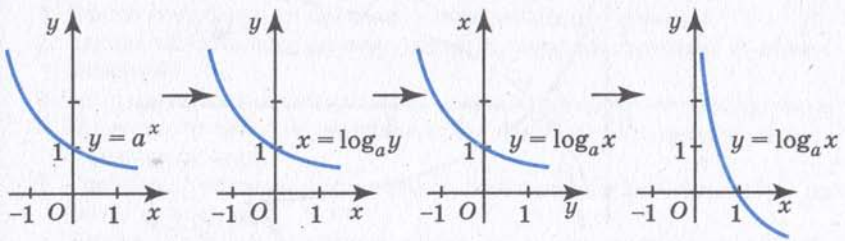


Рис. 32

возрастает, то большему значению x соответствует большее значение y, а большему значению y — большее значение x. Тогда и в соотношениях $x = \log_a y$ и $y = \log_a x$ большему значению x соответствует большее значение y, т. е. функция $y = \log_a x$ также возрастает.

Из всего сказанного вытекают следующие свойства функции $y = \log_a x$.

1. *Область определения — промежуток* $(0; \infty)$.

2. *Область значений — множество* $\boldsymbol{R}$.

3. *Функция возрастает на всей области определения, если* $a > 1$, *а если* $0 < a < 1$ — *убывает.*

4. *Функция ни чётная, ни нечётная, ни периодическая.*

5. *Если* $a > 1$, *то значения функции* $y = \log_a x$ *положительные при* $x > 1$ *и отрицательные при* $0 < x < 1$.

6. *Если* $0 < a < 1$, *то значения функции* $y = \log_a x$ *положительные при* $0 < x < 1$ *и отрицательные при* $x > 1$.

7. *График функции всегда проходит через точку* $A\,(1; 0)$.

Несколько графиков логарифмических функций показано на рисунке 33.

Если известно значение основания логарифма, то график логарифмической функции можно построить по точкам, составив предварительно таблицу значений. Постройте таким образом графики функций $y = \log_5 x$ и $y = \log_{0,5} x$ и убедитесь, что первая из них — возрастающая, а вторая — убывающая.

Обратите внимание на такие утверждения:

1) если $a > 0$, $a \neq 1$ и $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$;

2) если $a > 1$ и $\log_a x_1 > \log_a x_2$, то $x_1 > x_2$;

3) если $0 < a < 1$ и $\log_a x_1 > \log_a x_2$, то $x_1 < x_2$.

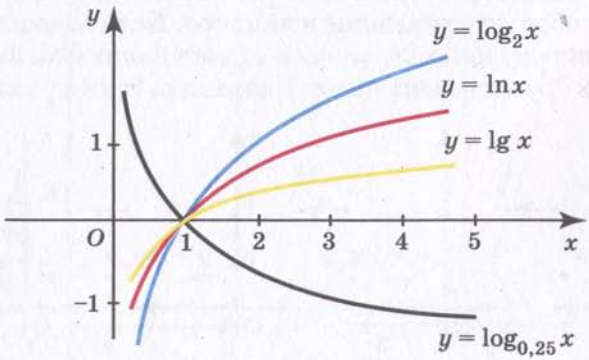


Рис. 33

Вы уже знаете, что графики функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$ — симметричны относительно прямой $y = x$. А как расположены графики функций $y = \log_a x$ и $y = \log_{\frac{1}{a}} x$?

Поскольку $\log_{\frac{1}{a}} x = \log_{a^{-1}} x = -\log_a x$, то понятно, что функции $y = \log_a x$ и $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ для одинаковых значений аргументов принимают противоположные значения. Это означает, что их графики симметричны относительно оси Ox. Примером являются графики функций $y = \log_3 x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, изображённые на рисунке 34.

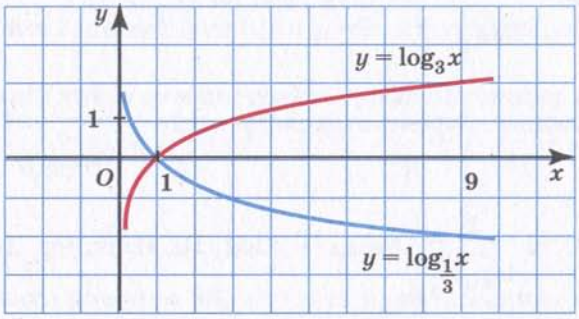


Рис. 34

Показательные и логарифмические функции удобны для моделирования процессов, связанных с ростом населения, капитала, размножением бактерий, изменением атмосферного давления, радиоактивным распадом и т. п.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Сформулируйте определение логарифмической функции.
2. Какова область определения логарифмической функции? А область значений?
3. Через какую точку проходит график каждой логарифмической функции?
4. Может ли аргумент логарифмической функции быть отрицательным? А равняться нулю?
5. При каком условии логарифмическая функция возрастает? А при каком — убывает?
6. Какая функция является обратной к логарифмической? Как расположены графики этих функций?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите область определения функции $y = \lg(2 + x - x^2)$.

Р е ш е н и е. Областью определения логарифмической функции является промежуток $(0; \infty)$, поэтому $2 + x - x^2 > 0$ или $x^2 - x - 2 < 0$. Корни уравнения $x^2 - x - 2 = 0$ равны -1 и 2, поэтому множество решений неравенства такое: $-1 < x < 2$.

О т в е т. $(-1; 2)$.

2. Сравните числа: а) $\log_{0,1} 9$ и $\log_{0,1} 0{,}9$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 10$ и $\log_{\frac{1}{3}} 10$.

Р е ш е н и е. а) Функция $y = \log_{0,1} x$ — убывающая, ибо $0{,}1 < 1$. Поскольку $9 > 0{,}9$, то $\log_{0,1} 9 < \log_{0,1} 0{,}9$.

б) Приведём второй логарифм к основанию 0,5:

$$\log_{\frac{1}{3}} 10 = \frac{1}{\log_{0,5} \frac{1}{3}} \cdot \log_{0,5} 10, \text{ где } \log_{0,5} \frac{1}{3} > 1.$$

Из последнего неравенства следует, что $\frac{1}{\log_{0,5} \frac{1}{3}} < 1$. Поскольку $\log_{\frac{1}{2}} 10 < 0$, то $\frac{1}{\log_{0,5} \frac{1}{3}} \cdot \log_{0,5} 10 > \log_{\frac{1}{2}} 10$. Итак, $\log_{\frac{1}{2}} 10 < \log_{\frac{1}{3}} 10$.

Выполните устно

243. Возрастающей или убывающей является функция:

а) $y = \log_{0,3} x$; б) $y = \ln x$; в) $y = \log_2 x$; г) $y = \lg x$?

244. Положительным или отрицательным является значение функции $y = \log_{\sqrt{3}} x$ в точке x_0:

а) $x_0 = 5$; б) $x_0 = 0{,}1$; в) $x_0 = 1{,}5$; г) $x_0 = e$?

245. Положительным или отрицательным является значение функции $y = \log_{0,1} x$ в точке x_0:

а) $x_0 = \pi$; б) $x_0 = 0{,}1$; в) $x_0 = \sqrt{1{,}2}$; г) $x_0 = 0{,}1e$?

246. Укажите область определения функции:

а) $y = \log_{\pi}(x - 3)$; б) $y = \ln(x + 1)$; в) $y = \log_2 x^2$; г) $y = \lg(-x)$.

247. Сравните с единицей число:

а) $\log_{49} 3$; б) $\log_2 14$; в) $\log_{98} 128$; г) $\log_2 e$.

248. Один из учеников утверждает, что на рисунке 35 изображён график функции $y = |\log_{0,25}|x||$, а второй говорит, что этот график соответствует функции $y = |\log_4|x||$. Кто из них прав?

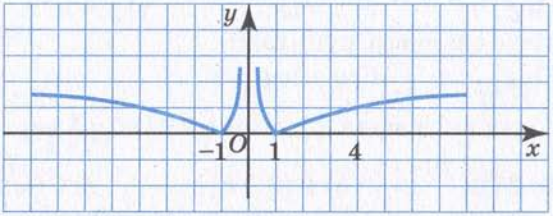


Рис. 35

Уровень А

249. Постройте графики функции $y = 3^x$ и функции, обратной к ней.

250. Заполните таблицу и постройте график функции $y = \log_8 x$.

x	0,25	0,5	1	2	4	8
$\log_8 x$						

251. Используя рисунок 36, найдите приближённые значения функции $y = \log_{2,5} x$ в точках с абсциссами:

а) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; б) 0,4; 1,4; 2,5; 3,8; 6,25.

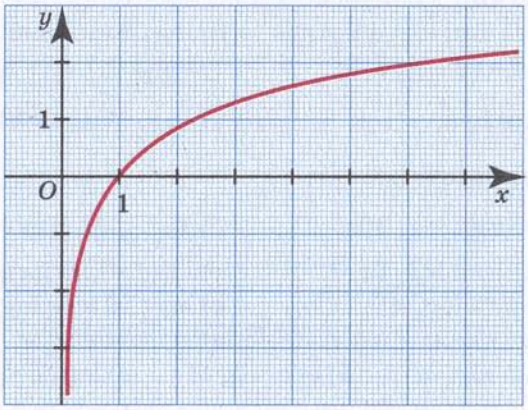


Рис. 36

252. Используя рисунок 36, установите, при каких значениях аргумента x значение функции $y = \log_{2,5} x$ равно:
а) $-1; -2; -3; 0; 1; 2$; б) $-0,5; -2,2; 0,4; 1,4; 2$.

253. Постройте график функции:
а) $y = \log_4 x$; б) $y = \lg x$; в) $y = \ln x$.

254. Опишите свойства функции:
а) $y = \log_{2,5} x$; б) $y = \log_{0,5} x$.

255. Проходит ли график функции $y = \log_{\sqrt{3}} x$ через точку:
а) $A(6; 27)$; б) $B(27; 6)$; в) $C(\sqrt{3}; 1)$?

256. Найдите a, если известно, что график функции $y = \log_a x$ проходит через точку:
а) $M(8; 3)$; б) $M(8; -3)$; в) $M(121; 2)$; г) $M(81; -4)$.

Сравните с нулём число (**257—258**).

257. а) $\log_{0,5} 5$; б) $\log_{0,5} 0,1$; в) $\log_2 0,5$; г) $\lg 4$.

258. а) $\log_{25} 7$; б) $\log_{\sqrt{5}} 50$; в) $\log_{0,5} \sqrt{3}$; г) $\ln 0,01$.

Уровень Б

259. Сравните числа:
а) $\log_2 0,4$ и $\log_2 0,6$; б) $\log_2 3$ и $\log_2 \pi$;
в) $\log_{0,2} 1,4$ и $\log_{0,2} 4,1$; г) $\log_{0,5} e$ и $\log_{0,5} \pi$;
д) $\log_3 2,7$ и $\log_3 2,5$; е) $\log_{0,5} 4$ и $\log_{0,5} 5$.

260. Найдите область определения функции:
а) $y = \log_3 2x$; б) $y = \ln(x - 3)$;
в) $y = \log_9 (x + 5)$; г) $y = \lg(1 - x)$.

261. Какое из чисел больше:
а) $\log_2 0,4$ или $\log_{0,2} 0,4$; б) $\log_2 3$ или $\ln 0,01$;
в) $\log_{0,2} 4$ или $\log_2 1,6$; г) $\log_{25} 0,7$ или $\lg 4$;
д) $\ln 3$ или $\lg \pi$; е) $\log_{\frac{1}{7}} 8$ или $\log_7 \frac{1}{8}$?

262. Какое из чисел меньше:
а) $\log_2 10$ или $\log_5 30$; б) $\log_{0,2} \sqrt{2}$ или $\log_{0,7} 0,3$;
в) $\log_{0,3} 2$ или $\log_5 3$; г) $\log_{0,1} 0,25$ или $\log_{0,5} 0,25$;
д) $\log_3 5$ или $\log_7 4$; е) $\log_3 10$ или $\log_8 57$?

263. Сравните числа a и b, если верно неравенство:
а) $\log_5 a > \log_5 b$; б) $\lg a < \lg b$; в) $\log_3 a < \log_3 b$;
г) $\log_{\frac{1}{5}} a \leq \log_{\frac{1}{5}} b$; д) $\ln a > \ln b$; е) $\log_{0,4} a > \log_{0,4} b$.

Найдите область определения функции (**264—265**).

264. а) $y = \log_8(x^2 - 3x - 4)$; б) $y = \log_{\sqrt{3}}\left(-x^2 + 5x - 6\right)$;

в) $y = \log_{0,7}\dfrac{x^2-9}{x+5}$; г) $y = \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x-4}{x^2+4}$.

265. а) $y = \log_\pi(2^x - 2)$; б) $y = \log_3(3^{x-1} - 9)$;

в) $y = \log_2\dfrac{x-1}{2-x}$; г) $y = \log_x(x - 0{,}5)$.

Постройте график функции (**266—267**).

266. а) $y = \log_2(x - 1)$; б) $y = \log_{0,5} x - 1$; в) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$;

г) $y = 1 + \log_2(x - 1)$; д) $y = 1 + \log_4 x$; е) $y = 1 + \dfrac{1}{2}\log_3 x$.

267. а) $y = \log_3(x - 2)$; б) $y = \log_3 x - 2$;

в) $y = \log_3 x - \log_3 2$; г) $y = \log_3(2 - x)$.

268. Сколько решений имеет уравнение:

а) $2\log_2 x = -2x + 3$; б) $2 = \log_{\frac{1}{2}} x$; в) $\lg x = \sqrt{x}$;

г) $\log_2 x = \sin x$; д) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2x - 5$; е) $\lg x = 2^{-x}$?

269. Решите графически уравнение:

а) $\log_3 x = 1 - x$; б) $x - 1 = 3\log_4 x$;

в) $\log_2 x = \sqrt{3-x}$; г) $\log_{0,5} x = -\dfrac{2}{x}$.

270. Решите неравенство:

а) $\log_5 x > \log_5 3$; б) $\lg x < \lg 4$; в) $\log_3 x < 2$;

г) $\log_{\frac{1}{5}} x \le \log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{8}$; д) $\ln x > \ln 0{,}5$; е) $\log_{0,4} x > 2$.

Уровень В

271. Решите графически неравенство:

а) $\log_2 x < 3 - x$; б) $\ln x < x^3 + 1$;

в) $\log_4 x > \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}$; г) $x < 11 - \lg x$.

272. Сравните числа:

а) $\lg 12$ и $\log_{15} 16$; б) $\log_3 6$ и $1{,}5$; в) $\log_2^2 5$ и $\log_2 20$;

г) $3^{\sqrt{\log_3 7}}$ и $7^{\sqrt{\log_7 3}}$; д) $\lg 105$ и $\log_7(45+\sqrt{2})$; е) $2\log_3 2$ и $\log_2 3$.

273. Найдите область определения функции:

а) $y=\dfrac{\log_{|x+5|} 3}{\log_3(x^2-x-2)}$; б) $y=\sqrt{\operatorname{tg}x-1}\cdot\log_{\operatorname{tg}x}\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}-1\right)$;

в) $y=\dfrac{\log_2(x^2+x-2)+4}{\log_{|x+4|}(x+8)}$; г) $y=\log_{\sin x+\sqrt{3}\cos x}(3+2x-x^2)$.

Постройте график функции (**274—275**).

274. а) $y=|\ln x|$; б) $y=\lg|x|$; в) $y=\log_2|3-x|$; г) $y=|1-\log_2 x|$.

275. а) $y=\log_x 1$; б) $y=\log_{x^2} x^2$; в) $y=\log_x x$.

г) $y=\sqrt{\log_\pi \cos x}$; д) $y=\log_{0,5}\operatorname{tg}x+\log_{0,5}\operatorname{ctg}x$.

276. Найдите $f(-4)$, если $\log_2 f(x)=3+x$.

277. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на промежутке I:

а) $f(x)=\log_8 x$, $I=\left[\dfrac{1}{8};8\right]$; б) $f(x)=\log_2(1+x^2)$, $I=[-1;2]$;

в) $f(x)=\log_{0,5}|x|$, $I=\left[\dfrac{1}{4};1\right]$; г) $f(x)=\log_2|x^2-4x|$, $I=[1;3]$.

278. Докажите неравенство:

а) $\log_n(n+1)>\log_{n+1}(n+2)$, $n\in N$, $n\geq 2$;

б) $\log_3^2(m+n)+\log_3^2(0{,}5mn)+1\geq 2\log_3(m+n)$,

$m>0$, $n>0$. Выясните, при каких m и n выполняется равенство.

Упражнения для повторения

279. Вычислите:

а) $2^{4\log_2 3}$; б) $9^{\log_3 5}$; в) $8^{\log_2 7}$;

г) $5^{-\log_5 4}$; д) $10^{1-\lg 5}$; е) $10^{2+\lg 2}$.

280. Прологарифмируйте, используя свойства логарифмов:

а) $\log_2\left(\dfrac{P^2\sqrt{Q}}{2R}\right)$; б) $\log_2\left(\dfrac{Q^3}{\sqrt{R}}\right)$; в) $\log_2\left(\dfrac{R^2\sqrt{Q}}{P^3}\right)$.

281. Упростите выражение:

а) $\dfrac{m^{2\sqrt{2}}-n^{2\sqrt{2}}}{\left(m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$; б) $1-\dfrac{\left(m^{\sqrt{3}}+n^{\sqrt{3}}\right)^2}{m^{2\sqrt{3}}-n^{2\sqrt{3}}}$.

§ 7. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Уравнение называется *логарифмическим*, если его переменные содержатся только под знаками логарифмов.

Примеры: $\log_3 x=2$, $\lg x+\lg 4=2$, $\ln(3x-2)=1-\ln x$.

Примечание. Уравнения, содержащие переменную не только под знаком логарифма, например $x+\ln x=0$, $x^{\lg x}=1$, не являются логарифмическими. Но они сводятся к логарифмическим, или при их решении используют свойства логарифмов. Поэтому и такие уравнения, а также неравенства, будем рассматривать в этом и следующем параграфах.

Простейшими логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a x=b, \text{ где } a>0 \text{ и } a\neq 1.$$

По определению логарифма при любом действительном b такое уравнение имеет единственное решение $x=a^b$.

Решение других логарифмических уравнений основывается на свойствах логарифмической функции, определении и свойствах логарифма.

Решая логарифмические уравнения, нужно установить область допустимых значений уравнения или осуществить проверку полученных корней.

Для логарифмических уравнений общего метода решения нет, однако можно выделить несколько групп уравнений, для решения которых используются определённые способы. Рассмотрим эти способы на конкретных примерах.

I. По определению логарифма.

Пример 1. Решите уравнение $\log_2(x^2-4x+12)=3$.

Решение. По определению логарифма $2^3=x^2-4x+12$. Решим полученное уравнение: $x^2-4x+12=8$, $x^2-4x+4=0$, отсюда $(x-2)^2=0$ и $x=2$.

Проверка. $\log_2(2^2-4\cdot 2+12)=\log_2 8=3$.

Ответ. 2.

Пример 2. Решите уравнение $\log_{x-1}(x^2-5x+2{,}25)=2$.

Решение. Область допустимых значений неизвестного определяется из условий:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-1\neq 1, \\ x^2-5x+2{,}25>0. \end{cases}$$

Следовательно, $x\in(4{,}5;\infty)$.

Решение заданного уравнения сводится к решению уравнения

$$x^2-5x+2{,}25=(x-1)^2, \text{ или } -3x=-1{,}25,\ x=\frac{5}{12}.$$

$x=\frac{5}{12}$ не принадлежит области допустимых значений.

Ответ. Уравнение не имеет действительных корней.

II. По свойствам логарифмов и логарифмической функции.

Пример 3. Решите уравнение

$\log_2(x-3)+\log_2(x-1)=3+\log_2(x-4)$.

Решение. Представим число 3 как логарифм по основанию 2: $3=\log_2 8$. Воспользуемся свойством $\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab$ и запишем уравнение в виде

$$\log_2(x-3)(x-1)=\log_2 8(x-4).$$

Согласно утверждению 1 (см. с. 60) имеем: $(x-3)(x-1)=8(x-4)$. Решим это уравнение:

$x^2-4x+3=8x-32$, или $x^2-12x+35=0$, отсюда $x_1=5$, $x_2=7$.

Проверку сделайте самостоятельно.

Ответ. 5; 7.

III. Введение новой переменной.

Многие логарифмические уравнения заменой $\log_a f(x)=y$ можно свести к алгебраическому уравнению с неизвестным y.

Пример 4. Решите уравнение $(\lg x-6)^{-1}+5(\lg x+2)^{-1}=1$.

Решение. Заменив $\lg x$ на y, получим уравнение

$$\frac{1}{y-6}+\frac{5}{y+2}=1,$$

имеющее корни: $y_1=2$, $y_2=8$. Итак, $\lg x=2$ или $\lg x=8$, отсюда $x_1=100$, $x_2=10^8$.

Проверка показывает, что оба значения удовлетворяют уравнение.

Ответ. 100; 10^8.

IV. Графический способ.

Некоторые логарифмические уравнения можно решать графически.

Пример 5. Решите графически уравнение $\log_4 x = 3 - \log_2 x$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \log_4 x$ и $y = 3 - \log_2 x$ (*рис. 37*). Как видим, графики этих функций пересекаются в точке с абсциссой $x = 4$. Чтобы убедиться, что $x = 4$ — корень данного уравнения, сделаем проверку: $\log_4 4 = 3 - \log_2 4$; $1 = 3 - 2$; $1 = 1$.

Ответ. 4.

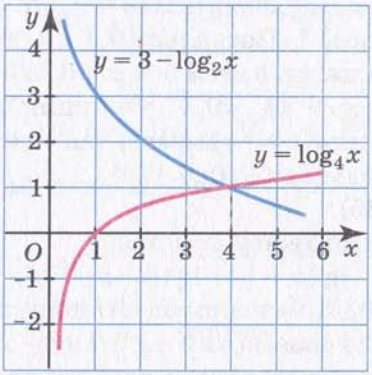


Рис. 37

V. Логарифмирование.

Рассмотрим уравнения, содержащие переменную не только под знаком логарифма, но и в основании степени. Их решают *способом логарифмирования.*

Пример 6. Решите уравнение $x^{\log_2 x} = 16$.

Решение. Найдём логарифмы от обеих частей уравнения по основанию 2 и упростим полученное уравнение. Имеем:

$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 16$, или $\log_2 x \cdot \log_2 x = 4$, $(\log_2 x)^2 = 4$. Отсюда:

$$1)\ \log_2 x = 2,\ x_1 = 4;\quad 2)\ \log_2 x = -2,\ x_2 = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Проверкой убеждаемся, что эти числа являются корнями уравнения.

Если в логарифмическом уравнении знак равенства изменить на знак неравенства, то получим логарифмическое неравенство.

Неравенство называется *логарифмическим*, если его переменные содержатся лишь под знаком логарифма.

Для решения логарифмических неравенств используют те же методы, что и для решения логарифмических уравнений, а также правила решения *простейших логарифмических неравенств*, т. е. неравенств вида $\log_a x > b$ или $\log_a x < b$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Для решения простейших логарифмических неравенств используют монотонность и учитывают область определения логарифмической функции. А именно:

1. Если $a > 1$ и $\log_a x > b$, то $x > a^b$.
2. Если $0 < a < 1$ и $\log_a x > b$, то $0 < x < a^b$.

Рассмотрим примеры.

Пример 7. Решите неравенство $\log_{0,5} x > 3$.

Решение. Способ 1. Поскольку $0,5 < 1$, то $x < 0,5^3$. Учитывая область определения, имеем $0 < x < 0,125$.

Способ 2. $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 0,5^3$. Функция $y = \log_{0,5} x$ на всей области определения $(0; \infty)$ убывает, так как $0,5 < 1$. Поэтому $x < 0,5^3$. Следовательно, $x \in (0; 0,125)$.

Ответ. $(0; 0,125)$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\lg(x-1) + \lg(8-x) < 1.$$

Решение. Найдём сначала область допустимых значений x. Решением системы неравенств $x - 1 > 0$ и $8 - x > 0$ есть интервал $(1, 8)$. На этом множестве данное неравенство равносильно неравенству $\lg(x-1)(8-x) < \lg 10$ или $(x-1)(8-x) < 10$. То есть $x^2 - 9x + 18 > 0$.

Множество решений образованного квадратного неравенства: $(-\infty; 3) \cup (6; \infty)$. Учитывая, что $x \in (1; 8)$, получим решение заданного неравенства: $x \in (1; 3) \cup (6; 8)$.

Ответ. $(1; 3) \cup (6; 8)$.

Пример 9. Решите неравенство $(\log_8 x)^2 - \log_2 x + 2 > 0$.

Решение. Сведём второй логарифм к основанию 8. Получим неравенство, равносильное заданному:

$$(\log_8 x)^2 - \frac{\log_8 x}{\log_8 2} + 2 > 0, \text{ или } (\log_8 x)^2 - 3\log_8 x + 2 > 0.$$

Пусть $\log_8 x = y$, тогда $(\log_8 x)^2 = y^2$. Составим неравенство с новой переменной $y^2 - 3y + 2 > 0$ и решим его. Квадратный трёхчлен $y^2 - 3y + 2$ имеет корни 1 и 2, а множество решений соответствующего неравенства изображено на рисунке 38.

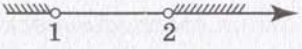


Рис. 38

Следовательно, $y < 1$ или $y > 2$. Тогда $\log_8 x < 1$ или $\log_8 x > 2$. Решим каждое из неравенств, учитывая, что $x > 0$.

Если $\log_8 x < 1$, то $0 < x < 8$.

Если $\log_8 x > 2$, то $x > 8^2$, или $x > 64$.

Ответ. $(0; 8) \cup (64; \infty)$.

Решая неравенства, содержащие переменную и под знаком логарифма и в основании логарифма, следует рассматривать два случая: 1) основание логарифма больше нуля, но меньше единицы; 2) основание логарифма больше единицы.

Пример. Решите неравенство $\log_{3-x}(x - 2{,}5) > 0$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\log_{3-x}(x - 2{,}5) > \log_{3-x} 1.$$

1) Если $0 < 3 - x < 1$, то неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 0 < 3 - x < 1, \\ 0 < x - 2{,}5 < 1, \end{cases} \text{ отсюда } \begin{cases} -1 < x - 3 < 0, \\ 0 < x - 2{,}5 < 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2 < x < 3, \\ 2{,}5 < x < 3{,}5. \end{cases}$$

Решением этой системы неравенств является промежуток $(2{,}5; 3)$.

2) Если $3 - x > 1$, то неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 3 - x > 1, \\ x - 2{,}5 > 1, \end{cases} \text{ отсюда } \begin{cases} x < 2, \\ x > 3{,}5. \end{cases}$$

Система решений не имеет.

Множество решений неравенства $\log_{3-x}(x - 2{,}5) > 0$ — объединение множеств решений каждой из рассматриваемых систем, то есть промежуток $(2{,}5; 3)$.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Какие уравнения называют логарифмическими?
2. Какое уравнение называют простейшим логарифмическим уравнением?
3. Какие способы решения логарифмических уравнений вы знаете?
4. Какие неравенства называют логарифмическими?
5. Какие способы решения логарифмических неравенств вы знаете?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Решите уравнение

$$\ln(x - 8) + \ln(1 - x) = 1.$$

Решение. Чтобы имели смысл выражения $\ln(x - 8)$ и $\ln(1 - x)$, нужно, чтобы одновременно выполнялись неравенства $x - 8 > 0$ и $1 - x > 0$. Система этих неравенств решений не имеет.

Ответ. Уравнение не имеет решений.

2. Решите уравнение

$$\log_5 \log_4 \log_3 x = 0.$$

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение так:

$$\log_5 (\log_4 \log_3 x) = 0.$$

Тогда число, стоящее в скобках, по определению логарифма равно 5^0, т. е. 1:

$$\log_4 \log_3 x = 1.$$

Запишем это уравнение так: $\log_4 (\log_3 x) = 1$. Отсюда получаем $\log_3 x = 4$, или $x = 3^4 = 81$.

О т в е т. 81.

3. Решите неравенство

$$\log^2_{0,5} x - 4 \geq 0.$$

Р е ш е н и е. Пусть $\log_{0,5} x = y$, тогда $y^2 - 4 \geq 0$.

Полученное неравенство удовлетворяют значения $y \geq 2$, а также $y \leq -2$. Итак, $\log_{0,5} x \geq 2$, отсюда $\log_{0,5} x \geq \log_{0,5} 0{,}5^2$, $0 < x \leq 0{,}25$ и $\log_{0,5} x \leq -2$, отсюда $\log_{0,5} x \leq \log_{0,5} 0{,}5^{-2}$, $x \geq 4$.

О т в е т. $(0; 0{,}25] \cup [4; \infty)$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$. Преобразуем систему, используя свойства логарифмов. Имеем:

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{x}{y} = 2, \\ \log_3 xy = 4, \end{cases} \text{ отсюда } \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 4, \\ xy = 81, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 4y, \\ xy = 81. \end{cases}$$

Последняя система имеет два решения (18; 4,5) и (−18; −4,5).

С учётом ОДЗ заданная система имеет единственное решение (18; 4,5).

О т в е т. (18; 4,5).

5. Решите неравенство $\lg (x + 3) + \lg 2 < 2\lg x - \lg (x - 4)$.

Р е ш е н и е. ОДЗ: $(4; \infty)$.

Перенесём $\lg (x - 4)$ из правой части неравенства в левую и превратим полученное неравенство, используя свойства логарифмов.

$$\lg (x + 3) + \lg 2 + \lg (x - 4) < 2\lg x,$$

$$\lg (2(x + 3)(x - 4)) < \lg x^2, \text{ отсюда:}$$

$2(x+3)(x-4) < x^2$, или $x^2 - 2x - 24 < 0$. Решением последнего неравенства есть промежуток $(-4; 6)$.

Учитывая ОДЗ, найдём множество решений заданного неравенства: $(-4; 6) \cap (4; \infty) = (4; 6)$.

Ответ. $(4; 6)$.

Выполните устно

Решите уравнение (282—284).

282. а) $\log_3 x = 1$; б) $\ln x = 1$; в) $\log_5 x = -1$;
г) $\lg x = 0$; д) $\log_4 x = 2$; е) $\log_7 x = -2$;
ё) $\ln x = -1$; ж) $\log_{0,1} x = -2$; з) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$.

283. а) $\log_x 16 = 2$; б) $\log_x 5 = -1$; в) $\log_x 81 = -4$.

284. а) $\lg(x+3) = \lg 2$; б) $\log_5 6 = \log_5 2x$; в) $\lg x^2 = \lg 4$.

Решите неравенство (285—286).

285. а) $\lg x > \lg 2$; б) $\ln x < \ln 2$; в) $\lg x^2 < \lg 9$;
г) $\lg(x-3) > \lg 2$; д) $\ln 3x \le \ln 6$; е) $\lg(x^2+4) \le \lg 20$.

286. а) $\log_2 x > 2$; б) $\log_2 x < 3$; в) $\lg x < 0$;
г) $\log_{0,2} x > 1$; д) $\log_{0,2} x < 0$; е) $\log_{0,5} x \ge 2$.

Уровень А

Найдите корни уравнения, используя определение логарифма (287—288).

287. а) $\log_5(x-1) = 2$; б) $\log_2(x^2+3x) = 2$;
в) $\log_2(x^2-1) = 3$; г) $\log_x(x^2-3x+6) = 2$.

288. а) $\log_2(x+5) = 1$; б) $\log_2(x^2+x) = 1$; в) $\log_3(x^2+2) = 3$;
г) $\log_x(16-x^3) = 3$; д) $\log_{\frac{1}{3}}(1-2x) = -2$; е) $\log_{16}(x^2-3x) = \frac{1}{2}$.

Используя свойства логарифмов, решите уравнение (289—290).

289. а) $\log_{12}(x-3) + \log_{12}(x-2) = 1$;
б) $1 + \log_5(2x-1) = \log_5(7x+4)$;
в) $\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-3)$;
г) $2\log_3 x = 1 + \log_3(2x-3)$.

290. а) $\log_2(x+3) + \log_2(x+2) = 1$;
б) $\log_3(x+1) - \log_3(x+2) = 1 + \log_3 4$;
в) $\lg(x+1) - \lg(x+3) = \lg 3 - \lg(x-1)$;
г) $\log_2(x+3) - \log_2(x-1) = 2 - \log_2(2x-8)$.

Решите уравнение (291—292).

291. а) $\log_2^2(x-1) - \log_2(x-1) - 6 = 0$; б) $\lg^2 x + 2\lg x - 3 = 0$;

в) $\log_2^2(3x-1) - \log_{\sqrt{2}}(3x-1) + 1 = 0$;

г) $\log_3^2(x+2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) - 2 = 0$.

292. а) $2\log_9^2(x+5) - 3\log_9(x+5) + 1 = 0$; б) $\ln^2 x - 2\ln x = 0$;

в) $\log_2^2(x+2) - \log_{\sqrt{2}}(x+2) - 8 = 0$;

г) $\log_4^2(x+1) + \log_{16}(x+1) - 0{,}5 = 0$.

Решите неравенство (293—294).

293. а) $\log_3(2x-1) < 3$; б) $\log_{0,2}(x^2 - 4x) \geq -1$;

в) $\log_2(3x-8) > \log_2(2x+1)$; г) $\log_{0,3}(1-2x) \leq \log_{0,3}(x+7)$.

294. а) $\log_5(3x+4) < 2$; б) $\log_{0,5}(x^2+3x) \leq -2$;

в) $\log_7(5x-13) < \log_7(2x+5)$; г) $\log_{\frac{1}{3}}(1-2x) \geq \log_{\frac{1}{3}}(3x-2)$.

Уровень Б

295. Решите уравнение:

а) $\log_5 x + \log_x 25 = 3$; б) $\log_2(2x-12) \cdot \log_x 2 = 1$;

в) $2\log_4 x - 3\log_x 4 = 1$; г) $\log_3(3x-4) \cdot \log_x 9 = 2$.

296. Решите неравенство:

а) $\log_3^2(x-1) \geq 9$; б) $\lg^2 x - \lg x < 2$;

в) $\log_2^2(x-2) \leq 1$; г) $\log_3^2 x - 5\log_3 x > 6$.

Найдите сумму целых решений неравенства (297—298).

297. а) $3 - \log_2(4-x) \geq 0$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 18) - 2\log_{\frac{1}{3}}(4-x) < 0$.

298. а) $1 + \log_{\frac{1}{3}}(2-x) > 0$; б) $\log_3(x^2 + 10x + 24) - \log_3(6x+36) \leq 0$.

299. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{1+\lg z} + \frac{6}{5+\lg z} = 1$; б) $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1$;

в) $\frac{1}{5-\log_2 x} + \frac{2}{1+\log_2 x} = 1$; г) $\lg 10x = \frac{3}{\lg x - 1}$.

Решите уравнение (300—303).

300. а) $\log_3(x+1)+\log_9(x+1)+\log_{81}(x+1)=7$;

б) $\log_3\log_2\log_{\frac{1}{3}}(x-1)=0$;

в) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{16x}2$; г) $\log_2(2^x-7)=3-x$.

301. а) $\log_2(x-2)+\log_4(x-2)+\log_8(x-2)=11$;

б) $\log_5\log_3\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=0$;

в) $2\log_x 3\cdot\log_{3x}3=\log_{9\sqrt{x}}3$; г) $\log_3(3^x-8)=2-x$.

302. а) $x^{\log_2 x+2}=8$; б) $x^{1+\log_3 x}=9x^2$;

в) $x^{\lg^3 x-3\lg x}=0{,}01$; г) $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}=10$.

303. а) $x^{\log_3 3x}=9$; б) $x^{2+\log_2 x}=4x^3$;

в) $x^{\lg^3 x-\lg x}=100$; г) $7^{\log_7^2 x}+x^{\log_7 x}=14$.

304. Найдите сумму целых решений неравенства:

а) $\log_2\frac{x-1}{7-x}\geq 1$; б) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{2x-1}{8-x}\leq -1$.

Решите неравенство (305—306).

305. а) $\log_x(x+2)\leq\log_x(3-x)$; б) $\log_{x-2}(2x-7)<1$;

в) $\log_{x-1}(2x-1)\geq\log_{x-1}(x+6)$; г) $\log_{x-1}(4-x)>1$.

306. а) $\log_{4-x}(x^2-x-2)\leq\log_{4-x}(x+6)$; б) $\log_{x+1}(5-x)>1$;

в) $\log_{10-x}(x^2+x-2)\leq\log_{10-x}(7x-7)$; г) $\log_x(2x-3)<1$.

Решите систему уравнений (307—308).

307. а) $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=4,\\ \log_2 x-\log_2 y=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_{0,2} x+\log_{0,2} y=-2,\\ x+y=26;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\log_2 x-\log_{\sqrt{2}} y=0,\\ x+y^2-8=0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2,\\ x^2+y=42.\end{cases}$

308. а) $\begin{cases}\log_3 x-\log_3 y=-2,\\ \log_3 x+\log_3 y=4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}} y=-5,\\ x-2y=60;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\log_5 x+\log_{0,2} y^2=0,\\ 2x+y^2-12=0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\log_x y+2\log_y x=3,\\ xy=8.\end{cases}$

Уровень В

Решите уравнение (309—312).

309. а) $2\lg x^2 + \lg^2(-x) = 5$; б) $x - \lg(2^x + x - 3) = x\lg 5$;

в) $\log_6^2 x^5 - 5\log_6 x^3 = 10$; г) $\log_2^2 4x - \log_2^2 2x = \log_2 x + 5$.

310. а) $3\log_2 x^2 + \log_2^2(-x) = 7$; б) $x - \log_6(3^x + x - 2) = x\log_6 2$;

в) $\log_3^2 x^2 - \log_{\frac{1}{3}} x = 5$; г) $\log_4^2 16x - \log_4 4x = \log_4^2 x + 6$.

311. а) $\log_{\frac{1}{9}}(x-8)^2 + \log_{\frac{1}{3}}(2-x) = \log_{\frac{1}{3}} 27$;

б) $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2$;

в) $\log_3(x^2+8) = 3 + \log_3 x - \dfrac{2}{\log_3\left(x + \dfrac{8}{x}\right)}$;

г) $\log_2 x\log_3 x\log_5 x = \log_2 x\log_3 x + \log_2 x\log_5 x + \log_3 x\log_5 x$.

312. а) $\log_2\cos 2x - \log_2\sin x - \log_2\cos x = 1$;

б) $\left|\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{4}\right| \cdot \log_{\sqrt{\frac{x+3}{7-x}}} 2 = 0$;

в) $\log_{\sin x\cos x}\sin x \cdot \log_{\sin x\cos x}\cos x = \dfrac{1}{4}$;

г) $\sqrt{\sin x - \dfrac{1}{2}} \cdot \log_3(x-2) = 0$.

Решите неравенство (313—315).

313. а) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2\dfrac{12x+6}{x^2-4}\right) < 0$; б) $(0,4)^{\log_3\left(\frac{3}{x}\right)\log_3(3x)} > (6,25)^{\log_3 x^2 + 2}$;

в) $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{0,5} x^2 - 3} > \sqrt{5}\left(\log_4 x^2 - 3\right)$;

г) $\log_{1-x}(x+1)\log_{x+2}(2-x) \le 0$.

314. а) $\log_{x+3}\dfrac{x-1}{x+2} \le \log_{x+3} 2$; б) $\log_{x+4}\dfrac{x-2}{x+3} \le \log_{x+4} 2$.

315. а) $\sqrt{4+11x-3x^2}\,(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x) \le 0$;

б) $\log_{|\sin x|}(x^2-8x+23) > \dfrac{3}{\log_2|\sin x|}$;

в) $\sqrt{x^2+5x+4}\,|\log_{\sin x}(\sqrt{4-x}+1)| \le 0$;

г) $\log_{\sin x}\cos x + 2 < 3\log_{\cos x}\sin x$.

316. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\log_{|x|}\log_2\log_3\log_y|x|=0,\\ \log_{|x|}2=\dfrac{1}{9};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{\lg x+\lg y}{\lg(x+y)}=1,\\ x^2+y^2=8;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2\log_x 2+8^{2\log_4\sqrt[3]{3y}}=\log_{\sqrt{x}}(2x^2)-xy,\\ 2^x\cdot 4^y=8;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4,\\ \log_4 x-\log_4 y=1.\end{cases}$

317. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_8\dfrac{x^2-2x}{x-3}\right)<0,\\ \log_x|x-10|<1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log^2_{\sqrt{2}}x+\log_2 x^4-8>\log_{\sqrt{2}}\dfrac{x^2}{4},\\ \left|\log_{\sqrt{2}}x-3\right|+\left|\log_2 x-3\right|\ge 3.\end{cases}$

Упражнения для повторения

318. Найдите область определения функции:

а) $y=\dfrac{x}{x^3-9x}$; б) $y=\dfrac{x}{\operatorname{tg}2x}$; в) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-x-2}{x}}$.

319. Решите уравнение:

а) $3^{x^2-x}=1$; б) $4^{x^2+x}=1$;

в) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-9}=1$; г) $1=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x^2-25}$.

320. Сравните значения выражений:

а) $3\sqrt{2}$ и $\sqrt{20}$; б) $3\sqrt{5}$ и $\sqrt{44}$; в) $\sqrt{13}$ и $2\sqrt{3}$;

г) $3\sqrt{7}$ и 8; д) $4\sqrt{5}$ и 9; е) $5\sqrt{2}$ и 7.

§ 8. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРАМИ

Напомним, что под задачами с параметрами понимают те задачи, в которых ход решения и ответ зависят от величин, входящих в условия задачи, но численные значения которых не заданы. Эти величины называются *параметрами* и могут принимать произвольные значения, или значения, которые удовлетворяют условие задачи.

Чтобы решать логарифмические и показательные уравнения, неравенства и их системы с параметрами, нужно, прежде всего, уметь хорошо решать обычные показательные и логарифмические уравнения и неравенства, знать различные методы их решения, не забывать об области допустимых значений. Также нужно помнить свойства квадратного трёхчлена и условия размещения его корней на числовой прямой, не забывать о графических методах решения задач, особенно в случаях, когда требуется найти количество решений уравнения.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $9^x - 2(a+1)3^x - 3a^2 + 2a + 1 = 0$ имеет два различных действительных корня?

Решение. Заменой $3^x = t$, $t > 0$ данное уравнение сводится к квадратному уравнению $t^2 - 2(a+1)t - 3a^2 + 2a + 1 = 0$, в котором $\frac{D}{4} = (a+1)^2 + 3a^2 - 2a - 1 = 4a^2$. Найдем корни уравнения: $t_1 = a + 1 + 2a = 3a + 1$, $t_2 = a + 1 - 2a = 1 - a$.

Для того чтобы исходное уравнение имело два различных действительных корня, должна выполняться система условий:

$$\begin{cases} t_1 > 0, \\ t_2 > 0, \\ t_1 \neq t_2, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} 3a+1 > 0, \\ 1-a > 0, \\ 3a+1 \neq 1-a, \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} a > -\frac{1}{3}, \\ a < 1, \\ a \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, $a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; 1)$.

Ответ. $a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; 1)$.

Пример 2. Для каждого значения параметра a найдите количество корней уравнения $\log_{2x}(ax+1)=0{,}5$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x>0, \\ 2x\neq 1, \\ ax+1=\sqrt{2x}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>0, \\ x\neq 0{,}5, \\ ax+1=\sqrt{2x}. \end{cases}$$

Обозначим: $f(x)=ax+1$, $g(x)=\sqrt{2x}$.

Построим графики функций $f(x)$ и $g(x)$ (*рис. 39*).

Из рисунка видно, что данное уравнение может иметь одно решение, два решения или не иметь ни одного.

1) Рассмотрим условие $x\neq 0{,}5$. Если $x=0{,}5$, то $0{,}5a+1=1$, т. е. $a=0$, следовательно, если $a=0$, то уравнение решений не имеет.

2) Найдём, при каких значениях a графики функций соприкасаются. Графики будут иметь одну общую точку, если уравнение $ax+1=\sqrt{2x}$ имеет одно решение. Найдём эти значения a.

$$a^2x^2+2ax+1=2x, \text{ или } a^2x^2+2(a-1)x+1=0.$$

В данном случае уравнение будет иметь один корень, если $a=0$ (что невозможно, поскольку тогда $x=0{,}5$), или если $D=0$.

Поскольку $\frac{D}{4}=(a-1)^2-a^2=-2a+1$, то $D=0$, если $a=0{,}5$.

Следовательно, если $a=0{,}5$, то уравнение имеет одно решение. Далее из рисунка видно, что если $a\in(0;\,0{,}5)$, то уравнение имеет два решения, если $a\in(-\infty;\,0)$ — одно решение, если $a\in(0{,}5;\,\infty)$ — уравнение решений не имеет.

Ответ. Если $a\in(-\infty;\,0)$ и $a=0{,}5$ — уравнение имеет одно решение;

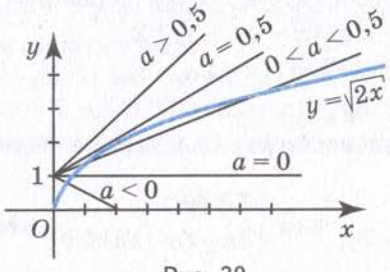


Рис. 39

если $a \in (0; 0,5)$ — два решения;

если $a \in (0,5; \infty)$ и $a = 0$ — уравнение решений не имеет.

Пример 3. Решите неравенство $(a-2) \cdot 3^x \le 2a - 5$.

Решение. Рассмотрим случаи:

1) $a = 2$, тогда $0 \cdot 3^x \le -1$, что невозможно. Следовательно, если $a = 2$, то неравенство не имеет решений.

2) $a > 2$, тогда $3^x \le \dfrac{2a-5}{a-2}$.

а) если $\dfrac{2a-5}{a-2} \le 0$, т. е. $a \in (2; 2,5]$, то неравенство решений не имеет, так как $3^x > 0$ при всех значениях x;

б) если $\dfrac{2a-5}{a-2} > 0$, т. е. $a \in (-\infty; 2) \cup (2,5; \infty)$ и $a > 2$, то $a \in (2,5; \infty)$.

В этом случае имеем $x \le \log_3 \dfrac{2a-5}{a-2}$.

3) $a < 2$, тогда $3^x \ge \dfrac{2a-5}{a-2}$. Поскольку $a < 2$, то выполняется неравенство $\dfrac{2a-5}{a-2} > 0$. Следовательно, если $a < 2$, то $x \ge \log_3 \dfrac{2a-5}{a-2}$.

Ответ. Если $a \in (-\infty; 2)$, то $x \ge \log_3 \dfrac{2a-5}{a-2}$; если $a \in [2; 2,5]$, то неравенство решений не имеет; если $a \in (2,5; \infty)$, то $x \le \log_3 \dfrac{2a-5}{a-2}$.

Пример 4. Решите неравенство

$$2\log_4 (x - a + 1) + \log_{0,5} (x - 2a - 3) \ge 2.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство:

$\log_2 (x - a + 1) - \log_2 (x - 2a - 3) \ge 2$,

$\log_2 (x - a + 1) \ge 2 + \log_2 (x - 2a - 3)$,

$\log_2 (x - a + 1) \ge \log_2 4(x - 2a - 3)$.

Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x - 2a - 3 > 0, \\ x - a + 1 \ge 4(x - 2a - 3), \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 2a + 3, \\ 3x - 7a - 13 \le 0, \end{cases} \text{ отсюда } \begin{cases} x > 2a + 3, \\ x \le \dfrac{7a+13}{3}. \end{cases}$$

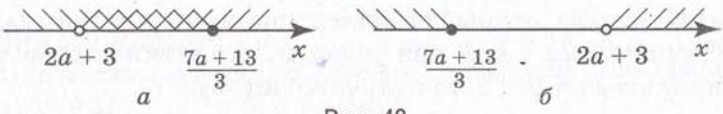


Рис. 40

Если $2a + 3 < \frac{7a+13}{3}$ (*рис. 40, а*), т. е. $a > -4$, то $x \in \left(2a+3; \frac{7a+13}{3}\right]$. Если $2a + 3 > \frac{7a+13}{3}$ (*рис. 40, б*), т. е. $a < -4$, то неравенство решений не имеет. Если $a = -4$, то, подставив это значение в условие (сделайте это самостоятельно), получим, что неравенство решений тоже не имеет.

О т в е т. Если $a \le -4$, то неравенство решений не имеет; если $a > -4$, то $x \in \left(2a+3; \frac{7a+13}{3}\right]$.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что означает выражение «задача с параметром»?
2. Объясните, что такое параметр.
3. Какие методы используют при решении задач с параметрами?
4. Что нужно помнить при решении показательных и логарифмических уравнений, неравенств и их систем с параметрами?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. При каком значении a неравенство $\log_{ax^2+2x+a+1}(2x^2 + (2a + 3)x + 8) > 1$ выполняется для произвольного значения x?

Р е ш е н и е.

1) Рассмотрим случай, когда $0 < ax^2 + 2x + a + 1 < 1$. Поскольку квадратичная функция не ограничена, то двойное неравенство не может выполняться для всех значений x, поэтому этот случай рассматривать дальше нет смысла.

2) Если $ax^2 + 2x + a + 1 > 1$, то есть $ax^2 + 2x + a > 0$, то заданное неравенство можно записать в виде

$2x^2 + (2a + 3)x + 8 > ax^2 + 2x + a + 1$, или

$(2 - a)x^2 + (2a + 1)x + 7 - a > 0$.

Следовательно, данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} ax^2 + 2x + a > 0, \\ (2-a)x^2 + (2a+1)x + 7 - a > 0. \end{cases}$$

Поскольку квадратный трёхчлен принимает положительные значения для всех $x \in \boldsymbol{R}$ при условии, что ветки параболы направлены вверх и $D<0$, то получим систему

$$\begin{cases} a>0, \\ 2-a>0, \\ 4-4a^2<0, \\ (2a+1)^2-4(2-a)(7-a)<0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a>0, \\ a<2, \\ a^2>1, \\ a<\dfrac{47}{36}, \end{cases} \text{ отсюда } a \in \left(1;\ 1\frac{3}{8}\right).$$

Ответ. $a \in \left(1;\ 1\frac{3}{8}\right)$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} 5^{2y-3x+1}+4\cdot 5^{y}=5^{3x}, \\ x^2+y^2=2a-1 \end{cases}$ имеет решения.

Решение. Запишем первое уравнение в виде $5\cdot 5^{2y-3x}+4\cdot 5^{y}=5^{3x}$ и разделим его на 5^{3x}. Получим уравнение $5\cdot 5^{2y-6x}+4\cdot 5^{y-3x}=1$. Заменой $5^{y-3x}=t$, $t>0$ приведём его к квадратному уравнению $5t^2+4t-1=0$, корни которого $t_1=\dfrac{1}{5}$, $t_2=-1$ (не удовлетворяет условию $t>0$). Тогда $5^{y-3x}=5^{-1}$, отсюда $y-3x=-1$, или $y=3x-1$.

Итак, систему можно записать в виде

$$\begin{cases} y=3x-1, \\ x^2+y^2=2a-1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=3x-1, \\ x^2+(3x-1)^2=2a-1. \end{cases}$$

Решим второе уравнение:

$x^2+9x^2-6x+1=2a-1$, $10x^2-6x+2-2a=0$, или $5x^2-3x+1-a=0$.

Уравнение, а следовательно и заданная система, будет иметь решение, если дискриминант $D \geq 0$.

$D=9-20+20a=20a-11$. Поскольку $20a-11 \geq 0$, если $a \geq \dfrac{11}{20}$, то при этих значениях a система имеет решения.

Ответ. $a \geq \dfrac{11}{20}$.

Выполните устно

321. При каких значениях параметра a уравнение имеет решения:
а) $2^x = a$; б) $3^{-x} = 2a$?

322. Решите уравнение:
а) $\log_a x = 2$; б) $\log_{a^2} x = 0$.

323. Для каждого значения параметра a решите неравенство:
а) $2^x < a$; б) $3^{ax} > 3$; в) $\log_a x < \log_a 2$.

Уровень А

324. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственный корень:
а) $(x-2)\log_3 a = 0$; б) $(x-a)\lg x = 0$.

325. При каких значениях параметра a имеет единственное решение уравнение $2^{2x} - (a+3)\cdot 2^x + 4a - 4 = 0$?

326. При каких значениях параметра b имеет единственное решение уравнение $9^x - 2(b+1)\cdot 3^x - 3b^2 + 2b + 1 = 0$?

327. При каких значениях параметра a имеет два различных действительных решения уравнение $4^x - (a+3)\cdot 2^x + 2a + 2 = 0$? Найдите эти решения.

328. При каких значениях параметра b имеет два различных действительных решения уравнение $2^{4x} - (5-b)\cdot 2^{2x} + 6 - 2b = 0$? Найдите эти решения.

329. При каких значениях параметра p имеет единственное решение уравнение $2\log_2(x+3) = \log_2 px$?

330. При каких значениях параметра c имеет единственное решение уравнение $\lg(x^2 - 2cx) - \lg(4x - 6c - 3) = 0$?

331. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{ax-5} < 4$; б) $\frac{a^x - 2a - 1}{a^x - 3} > 0$, если $a > 0$.

332. Решите неравенство:
а) $\log_a(x-3) - 1 > \log_a(x+1)$; б) $\log_m x < \log_x m$.

Уровень Б

333. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\log_2(x^2 - ax) = \log_2(2x - 4a + 8)$.

334. Для каждого значения параметра b решите уравнение $\log_5((b+4)x) = \log_5(x^2 + 2x)$.

335. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_2(4^x - a) = x$ имеет два различных решения.

336. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+a)>-3$.

337. При всех значениях параметра a решите неравенство:
а) $a^2\cdot 4^{x+1}+5a\cdot 2^x>9$; б) $25^x-a\cdot 5^x-a-1<0$.

338. Решите неравенство:
а) $\log_{2x+3}(a-2)<1$; б) $\log_a x+\log_a(x-2)>1$.

339. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство выполняется для всех $x\in R$:
а) $4^{x^2}+2(2a+1)\cdot 2^{x^2}+4a^2-3>0$; б) $\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2+2)>1$.

340. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений имеет решения:

а) $\begin{cases}3^{2y+3x+3}+2\cdot 3^{y+1}=3^{-3x},\\ x^2+y^2=2a-3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2{,}5,\\ x+y=a^2+4.\end{cases}$

Уровень В

341. Решите уравнение $\log_2 x+\log_a x+\log_4 x=1$.

342. При каких значениях параметра p не имеет корней уравнение $\log_2(\log_3(x^2+2x))=\log_2(\log_3(p+4)x-1)$?

343. Найдите количество решений уравнения $x\lg x=3-a\lg x$.

344. Найдите все значения параметра a, при которых для всех действительных значений x выполняется неравенство $9^{|\sin x|}+2(a-2)\cdot 3^{|\sin x|}+a^2-1>0$.

345. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{81}\right)^{8+\log_a x}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{a^2}x},\\ 0<x<1.\end{cases}$$

346. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=6,\\ y+6a=8+ax.\end{cases}$

347. Для каждого значения параметра a найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+2ax+a^2+1}{3a^2\cdot 3^{2x}-5a\cdot 3^x+2}}.$$

Упражнения для повторения

348. Решите уравнение:

а) $(\sin x + \cos x)^2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

б) $\operatorname{arctg}(1+x) + \operatorname{arctg}(1-x) = 0{,}25\pi$.

349. Решите неравенство $|x^2 + x + 1| < 2(x^2 + 1)$.

350. Вычислите значение выражения $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ КОНТРОЛЮ

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Какие из утверждений правильные для функции $y = a^x$:
а) $y = a^x$ — чётная; б) $D(y) = \boldsymbol{R}$; в) периодическая; г) $E(y) = \boldsymbol{R}$?

2. Какие из утверждений правильные для функции $y = \log_a x$:
а) $D(y) = \boldsymbol{R}$; б) график — парабола;
в) нечётная; г) возрастает ($a > 1$)?

3. Областью значений функции $y = 3^x - 2$ является:
а) $\boldsymbol{R}$; б) $(0; \infty)$; в) $(2; \infty)$; г) $(-2; \infty)$.

4. Вычислите $9^{2\log_3 7}$.
а) 7^2; б) 7^3; в) 7^4; г) 7^9.

5. Корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5} = 3^{5x+10}$ принадлежит промежутку:
а) $(-3; -1)$; б) $(-1; 1)$; в) $(1; 3)$; г) $(3; 5)$.

6. Найдите половину корня уравнения $\log_2(x+1) = \log_2(3x)$.
а) 0,75; б) 0,25; в) 0,5; г) 0.

7. Корень уравнения $\log_{0,2}(2x+5) = 1$ принадлежит промежутку:
а) $x < -2{,}5$; б) $-2{,}5 < x < 0$; в) $0 < x < 2{,}5$; г) $x > 2{,}5$.

8. Какое наибольшее число удовлетворяет неравенство $\left(\sqrt{3}\right)^x \le \frac{1}{9}$:
а) -6; б) -7; в) -5; г) -4?

9. Какое наименьшее целое число удовлетворяет неравенство $\log_{0,2}(x+2) < -2$:
а) 24; б) 23; в) 22; г) 21?

10. Найдите значение $\log_3(9b)$, если $\log_3 b = 5$.
а) 3; б) 5; в) 7; г) 9.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найдите значение аргумента, при котором функция принимает указанное значение:

а) $y = 2^x$, $y = 16$; б) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $y = 625\sqrt{5}$.

2. Сравните числа:

а) $2{,}3^{35}$ и $2{,}3^{41}$; б) $\left(\frac{7}{9}\right)^{16{,}2}$ и $\left(\frac{7}{9}\right)^{-3}$.

3. Найдите область определения функции:

а) $y = \lg(x+5)$; б) $y = \log_{x-3}(6+5x-x^2)$.

4. Постройте график функции:

а) $y = 2^x$; б) $y = 2^x + 1$; в) $y = |0{,}5^x - 1|$.

5. Решите уравнение:

а) $2^{x+3} - 2^{x+2} = 32$; б) $3\log_2^2(x-2) - 10\log_2(x-2) + 3 = 0$.

6. Решите неравенство и найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее его:

а) $0{,}7^{x^2-4x} > \left(\frac{10}{7}\right)^3$; б) $16^x \le 6 \cdot 4^x - 5$.

7. Решите неравенство и укажите, сколько натуральных чисел является его решениями:

а) $\log_{\frac{1}{5}}(2-x) \ge \log_{\frac{1}{5}}(2x+4)$; б) $\log_3(x^2 - 6x + 8) \le 1$.

8. Вычислите:

а) $\log_a \sqrt{b} + 8\log_b \sqrt{a}$, если $\log_a b = 2$;

б) $\log_\pi\left(4\sin\frac{\pi}{12}\right) + \log_\pi\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)$.

9. Решите систему:

а) $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ \log_{\sqrt{6}} x + \log_{\sqrt{6}} y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{x^2-5x-4} < 9, \\ \log_{\frac{1}{5}}(x^2+3) \ge \log_{\frac{1}{5}} 4x. \end{cases}$

10. Решите уравнение:

а) $2\log_{12}\left(x+\frac{6}{x-5}\right)=\log_{12}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}\right)+3$;

б) $2\cdot 9^x+3\cdot 4^x=5\cdot 6^x$.

11. Закон роста популяции задаётся формулой $x=x_0e^{kt}$, где x — численность популяции через промежуток времени t; x_0 — начальная численность популяции; k — коэффициент роста популяции. Найдите коэффициент роста популяции животных, если за 5 лет она увеличилась на 50 %.

Исторические сведения

Понятие функции появилось в математике в XVII в. Его введению способствовали, прежде всего, работы Р. Декарта, П. Ферма, И. Ньютона. Термин «функция» предложил Г. Лейбниц. Затем И. Бернулли, А. Лопиталь, К. Гаусс и другие математики уточняли и расширяли это понятие. Основные свойства числовых функций, в частности их чётность, нечётность, периодичность, непрерывность, дифференцируемость и т. д., исследовал в двухтомном труде «Введение в анализ бесконечно малых» Л. Эйлер.

Степени с небольшими натуральными показателями вавилонские учёные рассматривали ещё более 4000 лет назад. Степени с дробными, нулевыми и отрицательными показателями входили в математику в XIV—XVII вв. постепенно, разные математики обозначали их по-разному. После публикаций работ И. Ньютона современные обозначения этих степеней стали общепринятыми. Тогда же начали рассматривать степени с произвольными действительными показателями.

Учение о логарифмах в основном было разработано в XVI веке, но в практику вошло только после создания таблиц логарифмов. Первые такие таблицы составил шотландский математик Д. Непер. В качестве основания логарифмов он взял число $\frac{1}{e}$. Непер ввёл и термин «логарифм» (от греческих слов λογος — отношение, αριθμος — число). Первые таблицы десятичных логарифмов создал в 1617 г. Г. Бригс, а натуральных — в 1619 г. Дж. Спейдель. Оба — английские математики. До середины XX в. логарифмические таблицы и лога-

НЕПЕР Джон
(1550—1617)

ЕЙЛЕР Леонард
(1707—1783)

рифмические линейки были наилучшими средствами вычислений. С распространением электронных средств, особенно микрокалькуляторов, логарифмические вычисления ушли в прошлое.

Французский математик П. Лаплас сказал, что изобретение логарифмов продлило жизнь вычислителей.

Показательные и логарифмические функции основательно исследовал Л. Эйлер, называя их «показательными и логарифмическими количествами».

ГЛАВНОЕ В РАЗДЕЛЕ 1

Понятие степени обобщается такими равенствами:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a;\ a^1 = a;\ a^0 = 1\ (a \neq 0);\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ (a \neq 0);$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ (a > 0).$$

Если $a > 0$ — действительное, а α — иррациональное, то под степенью a^{α} понимают некоторое действительное число, которое является границей бесконечной последовательности $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, \ldots, a^{\alpha_n}, \ldots$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — бесконечная последовательность, пределом которой является число α.

Логарифмом числа b по основанию a ($a > 0$; $a \neq 1$) называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить b.

То есть, если $a^x = b$, то $x = \log_a b$ $(b > 0, a > 0, a \neq 1)$.

Свойства логарифмов:

$$\log_a 1 = 0;\quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;\quad \log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b;$$

$$\log_a a = 1;\quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;\quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a};$$

$$a^{\log_a b} = b;\quad \log_a x^p = p\log_a x;\quad \log_a x = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x.$$

Условия, при которых эти равенства правильные, указаны в тексте (с. 49—51).

$y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in \boldsymbol{R}$ — *степенная функция* с действительным показателем;

$y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ — *показательная функция*;

$y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ — *логарифмическая функция*.

Показательная и логарифмическая функции с тем же основанием — взаимно обратные. Их графики симметричны относительно прямой $y = x$.

Уравнение (неравенство) называется *показательным*, если его переменные входят только в показатели степеней.

Основные методы решения показательных уравнений и неравенств

- Приведение обеих частей уравнения к степеням с одинаковыми основаниями.
- Введение новой переменной.
- Функционально-графический метод.

Свойства показательной и логарифмической функций

	$y = a^x$		$y = \log_a x$	
	$0 < a < 1$	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$
$D(x)$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$	$(0; \infty)$	$(0; \infty)$
$E(x)$	$(0; \infty)$	$(0; \infty)$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$
$y > 0$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
$y < 0$	—	—	$(1; \infty)$	$(0; 1)$
возрастающая	—	$(-\infty; \infty)$	—	$(0; \infty)$
убывающая	$(-\infty; \infty)$	—	$(0; \infty)$	—

Уравнение (неравенство) называется *логарифмическим*, если его переменные содержатся только под знаками логарифмов.

Основные методы решения логарифмических уравнений и неравенств

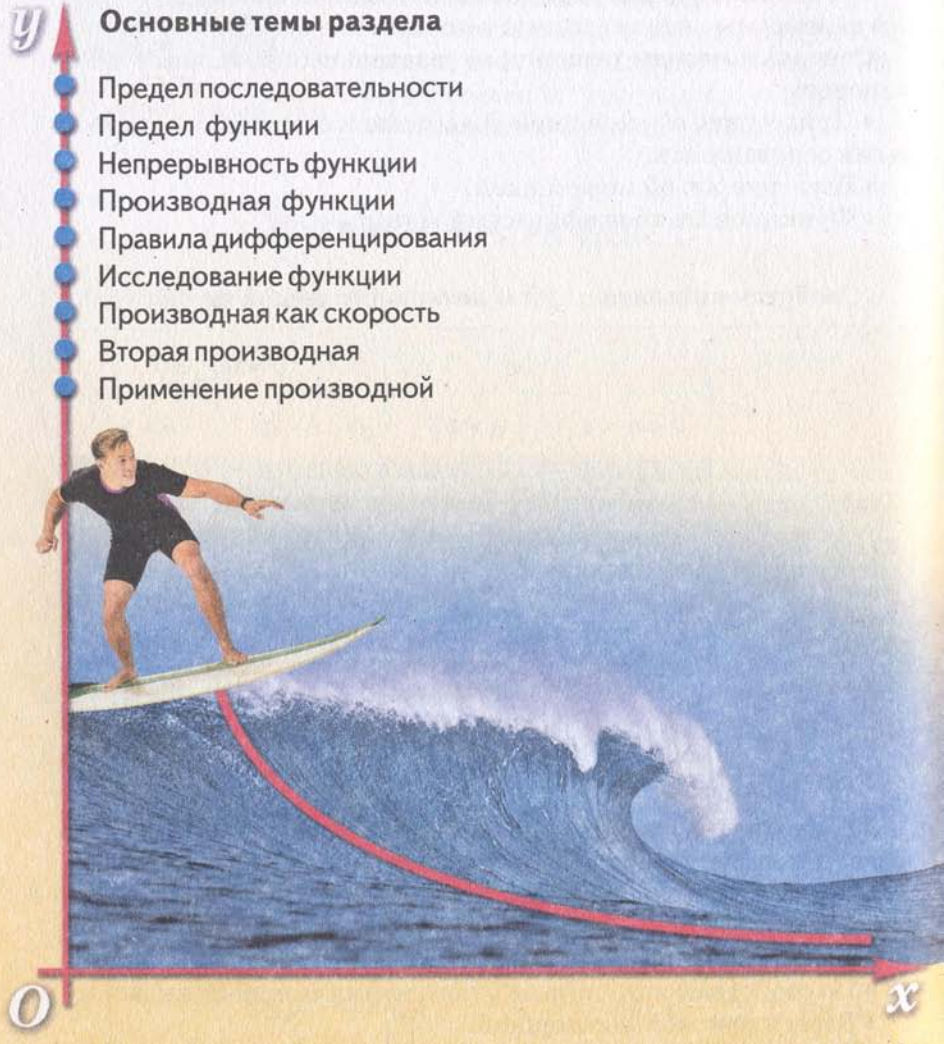
- По определению логарифма.
- По свойствам логарифмов и логарифмической функции.
- Введение новой переменной.
- Графический.
- Логарифмирование.

Раздел 2

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

Основные темы раздела

- Предел последовательности
- Предел функции
- Непрерывность функции
- Производная функции
- Правила дифференцирования
- Исследование функции
- Производная как скорость
- Вторая производная
- Применение производной



Что может быть проще дифференциального исчисления!
М. Остроградский

В этом разделе вы начинаете изучать начала математического анализа — области математики, в которой исследуются функции различной природы на основе *анализа бесконечно малых*. Вы ознакомитесь с мощным математическим аппаратом — *дифференциальным исчислением*, который существенно расширил границы применения математики. Методы математического анализа позволяют исследовать не только состояния, но и процессы.

§ 9. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

С понятием последовательности вы ознакомились ещё в основной школе, когда изучали арифметическую и геометрическую прогрессии. Несколько последовательностей рассматривались в § 2. А именно:

1) бесконечная последовательность рациональных приближений числа $\sqrt{2}$ с точностью до десятых, сотых, тысячных и т. д.:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ \ldots; \qquad (*)$$

2) последовательность степеней с основанием 3, показателями которых являются рациональные приближения числа $\sqrt{2}$ с точностью до десятых, сотых, тысячных и т. д.:

$$3^{1,4};\ 3^{1,41};\ 3^{1,414};\ 3^{1,4142};\ 3^{1,41421};\ \ldots .$$

Числовой последовательностью называется функция $y = f(n)$, которая задана на множестве натуральных чисел. При таком задании $y_1 = f(1)$, $y_2 = f(2)$, ..., $y_n = f(n)$, ... — соответственно первый, второй, ..., n-й, ... члены числовой последовательности.

Обозначают числовые последовательности (a_n), (x_n), (y_n).

Числовые последовательности задают описательно, перечнем членов, либо с помощью формулы (n-го члена или рекуррентной).

Например:

а) $y_n = (-1)^n$, $n \in N$: $\quad -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots;$

б) $y_n = \dfrac{n+1}{n}$, $n \in N$: $\quad 2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \ldots;$

в) $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_{n+2} = y_n + y_{n+1}$: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots .$

В курсе геометрии, чтобы вывести формулы длины окружности и площади круга, рассматривают последовательности вписанных в круг и описанных вокруг круга многоугольников. При этом отмечают, что при неограниченном увеличении числа сторон многоугольника его периметр всё ближе и ближе приближается к длине окружности (*рис. 41*).

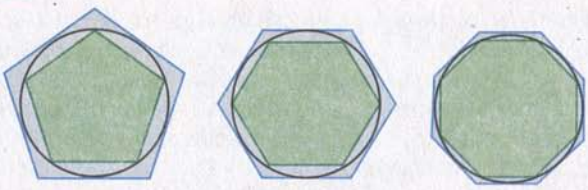


Рис. 41

Так получают первое интуитивное понятие *предела числовой последовательности*. В курсе математического анализа — это одно из важнейших понятий. Рассмотрим его подробнее.

Пусть задано числовую последовательность $y_n = \frac{2n+1}{2n+3}$. Вычислим её первые пять членов и изобразим их на координатной прямой (*рис. 42*). Имеем:

$$y_1 = \frac{3}{5} \approx 0{,}6,\ y_2 = \frac{5}{7} \approx 0{,}71,\ y_3 = \frac{7}{9} \approx 0{,}78,\ y_4 = \frac{9}{11} \approx 0{,}82,\ y_5 = \frac{11}{13} \approx 0{,}85.$$

Как видим, с увеличением номера члена последовательности сами члены последовательности всё ближе и ближе приближаются к числу 1. Поскольку расстоянием между точками, которые соответствуют числам на координатной прямой, есть модуль разности этих чисел, то можно утверждать, что для данной последовательности $|y_n - 1| < |y_{n-1} - 1|$.

Очевидно, что при росте числа n члены заданной последовательности всё меньше и меньше будут отличаться от числа 1. Например: $y_{100} = \frac{2 \cdot 100 + 1}{2 \cdot 100 + 3} = \frac{201}{203} \approx 0{,}990$, а $y_{1000} = \frac{2001}{2003} \approx 0{,}999$.

В данном случае для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ (эпсилон) можно найти такое число N (номер члена последовательности), что для всех последующих членов этой последовательности будет выполняться неравенство $|y_n - 1| < \varepsilon$.

Например, в рассмотренной выше последовательности для $\varepsilon = 0{,}2$ таким членом будет y_5 ($N = 5$), поскольку $|y_5 - 1| = \left|\frac{11}{13} - 1\right| < 0{,}2$; а для $\varepsilon = 0{,}01$ таким членом будет y_{100} (проверьте).

В этом случае говорят, что число 1 является *пределом* заданной числовой последовательности.

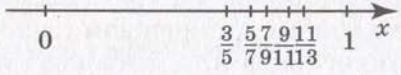


Рис. 42

Число A называют *пределом числовой последовательности* y_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер члена *последовательности* $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|y_n - A| < \varepsilon$.

Обозначают: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$. Читают: предел числовой последовательности y_n при n, стремящемся к бесконечности, равен A.

Пример 1. Вычислите предел последовательности $y_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Решение. Запишем несколько членов заданной последовательности: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{100}{101}, \ldots$. Как видим, её члены стремятся к числу 1. Проверим наше предположение. По определению предела надо найти такое число N, что для всех $n > N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство: $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$. Имеем:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon,\ n\varepsilon + \varepsilon > 1,\ n\varepsilon > 1-\varepsilon,\ n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Следовательно, такое число существует. Например, при $\varepsilon = 0{,}01$ последнее неравенство будет иметь вид $n > \dfrac{1-0{,}01}{0{,}01}$, или $n > 99$. То есть, начиная с 100-го члена последовательности расстояние между любым членом последовательности и числом 1 будет меньше 0,01.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

● Докажите самостоятельно и запомните, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Если числовая последовательность y_n имеет предел, то она называется *сходящейся*. Если числовая последовательность предела не имеет, то она называется *расходящейся*.

Рассмотрим свойства сходящихся последовательностей.

1. Если последовательность имеет предел, то этот предел единственный.

2. Предел постоянной последовательности равен значению любого члена этой последовательности, то есть

$$\lim_{n\to\infty} C = C.$$

3. Предел суммы (разности) двух сходящихся последовательностей равен сумме (разности) пределов этих последовательностей, то есть:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n .$$

4. Предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению пределов этих последовательностей, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n .$$

5. Если последовательности (x_n) и (y_n) — сходящиеся, $(y_n) \neq 0$, $n \in N$, то числовая последовательность $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ тоже сходящаяся и выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad \left(\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0\right).$$

Пример 2. Найдите предел последовательности $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

Решение. Эту последовательность можно представить в виде суммы двух сходящихся последовательностей $y_n = 1$, $x_n = \frac{n}{n+1}$ (проверьте). На основании свойств 2 и 3 имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}+1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} + \lim_{n\to\infty} 1 = 1+1 = 2.$$

Для вычисления предела последовательности, которая задаётся как отношение двух многочленов $\frac{P_m(n)}{Q_k(n)}$, используют следующее правило.

Для того чтобы вычислить предел числовой последовательности, которая задаётся как отношение двух многочленов $\frac{P_m(n)}{Q_k(n)}$ *(одной переменной n, степеней m и k соответственно), каждый из которых имеет предел, равный бесконечности, необходимо каждый член заданных многочленов разделить на наивысшую степень n и выяснить, к чему стремится каждый из полученных членов заданного отношения.*

Пример 3. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+5}{n^3-8n}$.

Решение. Здесь $P(n)=3n^2-4n+5$, $Q(n)=n^3-8n$. Предел каждого многочлена равен бесконечности. Поскольку $m=2$, $k=3$, то делим каждый член многочленов на n^3 и выясняем, к чему стремится каждый из полученных членов.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n+5}{n^3-8n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{1-\frac{8}{n^2}}=\frac{0-0+0}{1-0}=0.$$

Пример 4. Вычислите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^6-7n^5+3}{8-n^6+3n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^6-n^5+8}{n^5+3n^2}$.

Решение. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^6-7n^5+3}{8-n^6+3n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-\frac{7}{n}+\frac{3}{n^6}}{\frac{8}{n^6}-1+\frac{3}{n^4}}=\dfrac{5}{-1}=-5$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^6-n^5+8}{n^5+3n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-\frac{1}{n}+\frac{8}{n^6}}{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^4}}=\dfrac{5-0+0}{0+0}=\infty$.

Заметим, что здесь не происходит деление на ноль, поскольку знаменатель лишь стремится к нулю, но ему не равен.

Проанализируем полученные ответы. В примере 3 степень числителя меньше степени знаменателя. Это означает, что знаменатель стремится к бесконечности быстрее, чем числитель, а следовательно, предел их отношения будет равняться нулю. В примере 4, в задании а) степени числителя и знаменателя одинаковы и в результате получили отношение коэффициентов при старших степенях. В задании б) степень числителя больше степени знаменателя. Это означает, что числитель стремится к бесконечности быстрее, чем знаменатель, а потому предел их отношения равен бесконечности. Итак, имеем еще такое правило.

Для того чтобы вычислить предел числовой последовательности при $n\to\infty$, которая задаётся как отношение двух многочленов $\dfrac{P_m(n)}{Q_k(n)}$ *(одной переменной n, степеней m и k соответ-*

ственно), каждый из которых имеет предел, равный бесконечности, необходимо сравнить эти степени. Если:

1) $m = k$, *то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях заданных многочленов;*

2) $m < k$, *то предел равен нулю;*

3) $m > k$, *то предел равен бесконечности.*

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что называется числовой последовательностью?
2. Приведите примеры последовательностей.
3. Как обозначают числовые последовательности?
4. Как задают числовые последовательности?
5. Что такое предел последовательности?
6. Какие последовательности называют сходящимися?
7. Сформулируйте свойства сходящихся последовательностей.
8. Сформулируйте правило нахождения предела отношения двух многочленов.

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Пользуясь определением предела числовой последовательности, докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+3}=2$.

Р е ш е н и е. Нужно доказать, что существует такое $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{2n+1}{n+3}-2\right|<\varepsilon$. Преобразуем выражение, стоящее в левой части:

$$\left|\frac{2n+1}{n+3}-2\right|=\left|\frac{2n+1-2n-6}{n+3}\right|=\left|\frac{-5}{n+3}\right|=\frac{5}{n+3}.$$

Пусть $\dfrac{5}{n+3}<\varepsilon$, тогда $5 < n\varepsilon + 3\varepsilon$, а $n>\dfrac{5-3\varepsilon}{\varepsilon}$. Для любого ε можем найти соответствующее $N(\varepsilon)$, например $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{5-3\varepsilon}{\varepsilon}\right]$.

Итак, пределом заданной последовательности является число 2.

2. Вычислите: а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+3n}+\sqrt[3]{n^3-3n^2}}{4n}$.

Р е ш е н и е. а) Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряжённое.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0,\ \text{так как}\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\infty.$$

б) Разделим числитель и знаменатель дроби на n. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+3n}+\sqrt[3]{n^3-3n^2}}{4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{n^3}{n^3}+\frac{3n}{n^3}}+\sqrt[3]{\frac{n^3}{n^3}-\frac{3n^2}{n^3}}}{\frac{4n}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}}}{4}=\frac{1+1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Выполните устно

351. Какие из последовательностей сходящиеся:

а) 2, 4, 6, 8, 10, ... ; б) −1, −2, −3, −4, −5, ... ;

в) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$; г) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$?

352. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 10$. Найдите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n : \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

353. Какой из пределов равен нулю:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3-7n^2+3}{8-n^2+3n^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5-7n^2+3}{n^2+3n^3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-7n^2+3}{n^3+3n+1}$?

354. Какой из пределов равен бесконечности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-7n^2+3}{n^2+3n^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5-7n^2+3}{3n^2+3n^3-7}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2+3n-1}{n^3+3n+1}$?

Уровень А

355. Изобразите на числовой прямой первые восемь членов последовательности (y_n). К какому числу стремятся её члены, если:

а) $y_n = \frac{1}{n}$; б) $y_n = \frac{n+2}{n}$; в) $y_n = \frac{6n+2}{2n-1}$; г) $y_n = \frac{4n+3}{2n}$?

356. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0{,}5$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 20$. Найдите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} 2x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - 3\lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} 5x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n : \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Найдите пределы (**357—359**).

357. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+n^2}{n^3-4n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n^2-n+1}{5n^3-4n+17}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4+1}{n^3+2n^2}$.

358. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n+1}{n^2-4n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n^2+1}{4n^2+7}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4+1}{n^4+2n^2-1}$.

359. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-n^2}{2n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-3n-n^2}{n^2+n+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3+8}$.

Уровень Б

360. Запишите пример возрастающей последовательности, предел которой равен числу 1.

361. Запишите пример убывающей последовательности, предел которой равен числу 3.

362. Запишите пример расходящейся последовательности.

363. Пользуясь определением предела, докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n-1}{2n} = 2{,}5$, и установите, начиная с какого n выполняется неравенство $\left|\dfrac{5n-1}{2n} - 2{,}5\right| < \dfrac{1}{100}$.

Пользуясь определением предела числовой последовательности, докажите равенства (**364—365**).

364. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n-1}{2n+1} = \dfrac{5}{2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2+n+1} = 1$.

365. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3n-1} = \dfrac{1}{3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n-1}{5n+1} = 1$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-1}{n^2+n+1} = 3$.

Пользуясь свойствами пределов и результатами № 364 и № 365, найдите пределы последовательностей (**366—367**).

366. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}+5\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(n^2-1)}{n^2+n+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{5n+1}-\frac{n}{2n+1}\right)$.

367. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{3n-1}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{2n+1}+\frac{1}{n}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}+\frac{5n-1}{2n+1}\right)$.

368. Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^4$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}(9\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{9n})$.

Найдите пределы (**369—371**).

369. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n(1+n^2)}{n^3-4n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^3+n)(n+1)}{5n^3-4n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^4+1}{n^3(1+2n^2)}$.

370. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{3\sqrt{n}+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}+2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+2}$.

371. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$.

Уровень В

372. Пользуясь определением предела числовой последовательности, докажите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n^2-1}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^n}=1$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2}=\frac{1}{3}$.

Найдите пределы (**373—377**).

373. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)\left(1-2n^2\right)}{n^3+8}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n^2+1)(3n^2-1)}{2n^2-1}$.

374. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n-1}{5n^2+2}\right)^2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{5n^2+2}\right)^4$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{n^2+n+1}\right)^3$.

375. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}+2}{n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^3+2n^2}{1-8n^3}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{n^2+2n}{1+n^3}}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[3]{n^3-2}}{2n}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-4}{\sqrt{n^4+2}}$.

376. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{2n^2}$.

377. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

Упражнения для повторения

378. Найдите область определения функции: $y=\ln\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

379. Постройте график функции: а) $y=2^{x-1}$; б) $y=\sqrt[3]{x}$.

380. Через пять лет за кредит, выданный в размере 10 000 грн, банк получил 30 500 грн. Под какую процентную ставку выдан кредит?

§10. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Часто говорят о значении функции в точке, пределе функции в точке, приращении функции в точке, непрерывности функции в точке. О каких точках идёт речь? О точках оси абсцисс — значениях аргумента.

Значение функции в точке. Пусть задано, например, функцию $f(x)=x^2+x+1$. Если $x=1$, то соответствующее значение функции равно 3. Говорят, что в точке $x=1$ значение функции $f(x)$ равно 3. В точке $x=0$ её значение равно 1, в точке $x=10$ значение функции $f(x)$ равно 111. Пишут: $f(1)=3$, $f(0)=1$, $f(10)=111$.

Предел функции в точке. Рассмотрим ту же функцию $f(x)=x^2+x+1$. Если значения её аргумента x достаточно близко и с обеих сторон приближаются к 1, то соответствующие значения функции как угодно близко приближаются к числу 3 (*рис. 43*). Об этом свидетельствуют данные таблицы (*рис. 44*), в которой содержатся значения

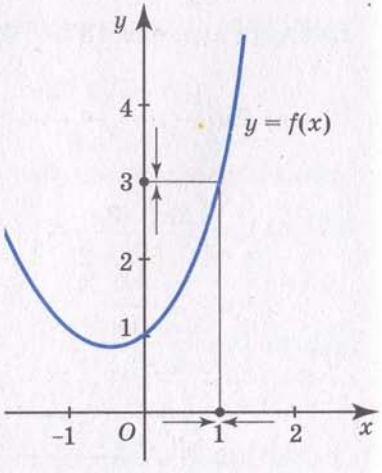
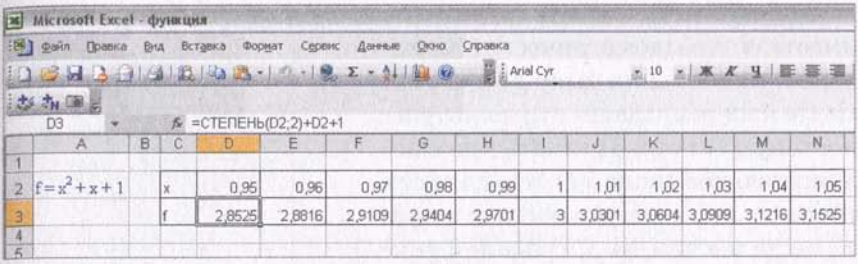


Рис. 43


Microsoft Excel - функция

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Arial Cyr 10

D3 =СТЕПЕНЬ(D2;2)+D2+1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	$f=x^2+x+1$		x	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
3			f	2,8525	2,8816	2,9109	2,9404	2,9701	3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216	3,1525
4														
5														

Рис. 44

функции $y = x^2 + x + 1$ для 10 значений аргумента, близких к числу 1, и график, изображённый на рисунке 43.

Другими словами: разность $|f(x) - 3|$ может стать и оставаться сколь угодно малой, если разность $|x - 1|$ будет достаточно малой. В этом случае говорят, что предел функции $f(x)$ в точке $x = 1$ равен 3. Пишут: если $x \to 1$, то $f(x) \to 3$, или $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

Существенная деталь: функция может иметь предел даже в такой точке, в которой она не определена. Например, функция $\varphi(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ в точке $x = 1$ не имеет значения, потому что знаменатель не может равняться нулю. Во всех остальных точках функция $\varphi(x)$ имеет такие же значения, как и функция $f(x)$, ибо $(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$, если $x \neq 1$. График функции $\varphi(x)$ изображён на рисунке 45. Хотя значение функции $\varphi(x)$ в точке $x = 1$ не существует, а её предел в этой точке существует и равен 3.

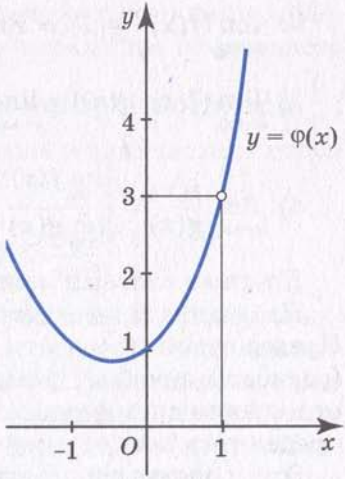


Рис. 45

Определение предела функции можно сформулировать так.

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число $\delta(\varepsilon)$, что для всех значений x из промежутка $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ кроме, возможно, самой точки x_0, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пишут так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

Определение предела функции имеет простое геометрическое толкование: какое бы ни было достаточно малое наперёд заданное положительное число ε, можно указать такое положительное число $\delta(\varepsilon)$, что для всех точек x, которые удалены от точки x_0 не далее чем на δ, график функции $y = f(x)$ лежит внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (*рис. 46*).

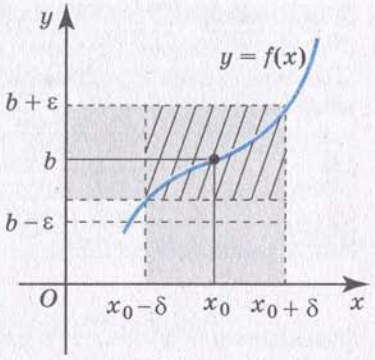


Рис. 46

Предел функции имеет интересные свойства. Например:

- функция не может иметь двух различных пределов в точке;
- если c — число, то $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$;

Несколько свойств сформулируем в виде теоремы.

Т е о р е м а. **Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет предел в точке x_0, то в этой точке существуют пределы функций $kf(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ справедливы равенства:**

1) $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Другими словами можно сказать так.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела. Предел суммы (разности, произведения) функций равен сумме (разности, произведению) пределов данных функций. Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если предел делителя не равен нулю.

Эти свойства используют для вычисления пределов функций в заданных точках.

Пример 1. При условии, что $x \to 5$, вычислите предел функции $f(x)$, если:

а) $f(x) = 2x - 3$; б) $f(x) = x^2 - 10x + 17$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 5}(2x-3) = \lim\limits_{x\to 5}(2x) + \lim\limits_{x\to 5}(-3) = 2\lim\limits_{x\to 5} x - 3 =$

$= 2 \cdot 5 - 3 = 7;$

б) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2 - 10x + 17) = \lim\limits_{x\to 5}(x^2) + \lim\limits_{x\to 5}(-10x) + \lim\limits_{x\to 5} 17 =$

$= \left(\lim\limits_{x\to 5} x\right)^2 - 10 \cdot \lim\limits_{x\to 5} x + \lim\limits_{x\to 5} 17 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 17 = 25 - 50 + 17 = -8.$

Замечание. Решая такие упражнения, некоторые преобразования можно выполнять устно.

В предыдущих примерах для нахождения предела достаточно было подставить в данное выражение предельное значение аргумента. Но часто такая подстановка приводит к неопределённости вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. В таких случаях сначала необходимо преобразовать данное выражение, а уже потом вычислять предел. Нахождение предела таким образом называется раскрытием неопределённостей.

Пример 2. Найдите $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$.

Решение. Поскольку при $x \to 3$ предел знаменателя равен нулю, то использовать теорему о пределе частного нельзя. Непосредственная подстановка в данное выражение предельного значения аргумента $x = 3$ приводит к неопределённости вида $\frac{0}{0}$. Чтобы её раскрыть, разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Имеем:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x+3} = \frac{5}{6}.$$

Приращения аргумента и функции. Пусть дано, например, функцию $f(x) = x^2$. В точке $x_0 = 2$ её значение $f(2) = 4$. Увеличим значение аргумента на 0,01, то есть, пусть $x = 2{,}01$. Соответствующее значение функции $f(2{,}01) = 4{,}0401$. По сравнению с предыдущим значением оно увеличилось на 0,0401. Здесь 0,01 — *приращение аргумента*, а 0,0401 — соответствующее *приращение функции*, а именно: приращение функции $f(x) = x^2$ на промежутке $[2; 2{,}01]$.

Приращением аргумента в точке x_0 называют разность $x - x_0$, где x — произвольное число, которое мало отличается от x_0 и может быть положительным или отрицательным. Соответствующее приращение функции $f(x)$ — разность $f(x) - f(x_0)$.

Приращение аргумента x обозначают символом Δx, а приращение функции Δf, Δy (читают: дельта икс, дельта эф, дельта игрек). Так, в рассматриваемом примере $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta f = 0{,}0401$.

Геометрически приращение аргумента изображается приращением абсциссы точки кривой, а приращение функции — приращением ординаты этой точки (*рис. 47*).

Свойства этих понятий показано на рисунках 47 и 48. Если функция $f(x)$ — возрастающая и $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x)$ — число положительное, а если $f(x)$ — убывающая функция и $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x)$ — число отрицательное.

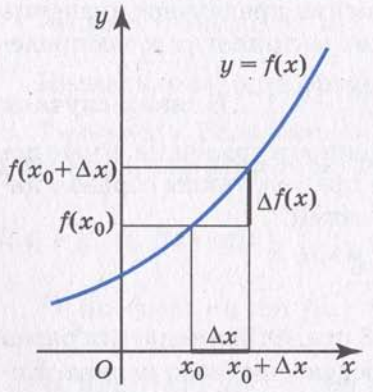


Рис. 47

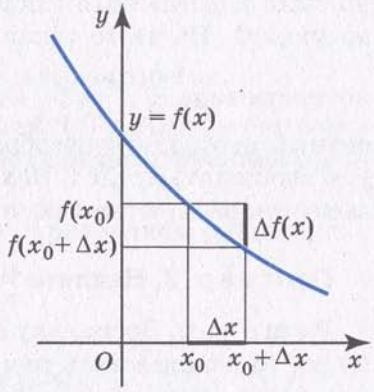


Рис. 48

Непрерывность функции. Как связаны между собой приращения аргумента x и функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 2$? Если $\Delta x = 0{,}01$, то $\Delta f = 0{,}0401$; если $\Delta x = 0{,}001$, то $\Delta f = 0{,}004001$ и т. д. Вообще, если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta f \to 0$, т. е. приращение функции стремится к нулю, когда стремится к нулю приращение аргумента (слева или справа). В таком случае говорят, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 2$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если в этой точке достаточно малым приращениям аргумента соответствуют сколь угодно малые приращения функции.

Иначе: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Преобразуем последнее равенство:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=\lim_{\Delta x\to 0}(f(x)-f(x_0))=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)-\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)-f(x_0).$$

Поскольку $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ і $\Delta x\to 0$, когда $x\to x_0$, то получим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)-f(x_0)=0$, отсюда

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в точке x_0.

Использование последней формулы существенно упрощает вычисление пределов для непрерывных функций.

Функция называется *непрерывной на промежутке*, если она непрерывна в каждой его точке. График такой функции — непрерывная кривая (её можно провести, не отрывая карандаш от бумаги).

На рисунке 49 изображены графики функций, имеющих разрывы в точке $x=1$; они не являются непрерывными в этой точке.

Непрерывными в каждой точке своей области определения есть элементарные функции — рациональные, тригонометрические, $y=\sqrt[n]{x}$ $(n\in N)$, а также функции, образованные из них с помощью четырёх арифметических действий. Графики элементарных функций на каждом промежутке из области определения являются неразрывными линиями.

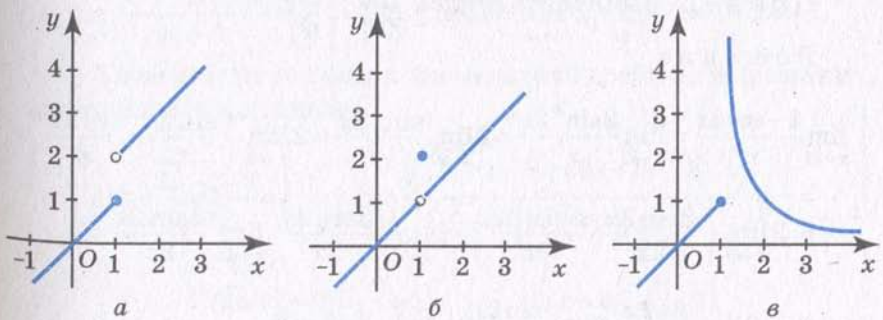


Рис. 49

Теория пределов — большой и интересный раздел курса математического анализа, который изучается в университетах. В школе этот материал изучают обзорно, на основе наглядных представлений и интуиции. Представление о пределах и их свойствах желательно иметь для изучения производной и её применений — мощного аппарата для исследования многих реальных процессов.

Предлагаем вам ознакомиться с одним из интересных и важных фактов теории пределов. Рассмотрите таблицу, составленную с помощью Excel.

t	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	0,1
$\sin t$	−0,0998	−0,00999	−0,009999	0,009999	0,0099	0,0998
$\frac{\sin t}{t}$	0,998	0,999	0,9999	0,9999	0,999	0,998

Как видим, при достаточно малых значениях t $\sin t \approx t$, а $\frac{\sin t}{t} \approx 1$.

В курсе математического анализа строго доказывается, что

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Это равенство называется *первым замечательным пределом*. Его используют для нахождения пределов функций, связанных с тригонометрическими.

Пример. Вычислите предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} = 2\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2} = 2\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} \right) =$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \left(\frac{2\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2\sin 2x}{2x} \right) = 2\lim_{x \to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} =$$

$$= 2 \cdot 2\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8.$$

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое предел функции в точке?
2. Что такое приращение аргумента? Как его обозначают?
3. Что такое приращение функции? Как его обозначают?
4. Какую функцию называют непрерывной в точке?
5. Когда говорят о непрерывности функции на промежутке?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Р е ш е н и е. а) В точке $x=3$ предел каждой из дробей не существует, поэтому воспользоваться теоремами о пределах мы не можем. Упростим функцию, содержащуюся под знаком предела, выполнив действие вычитания. Имеем:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 3}\left(\frac{6-x-3}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{x^2-9}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{x+3}=\frac{-1}{3+3}=-\frac{1}{6}.$$

б) В точке $x=1$ данная функция не определена, но дробь $\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ можно сократить: $\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$.

Поскольку для вычисления предела при $x\to 1$ саму точку $x=1$ можно исключить и не рассматривать, то

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}(x-2)=\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}2=1-2=-1.$$

в) Умножим числитель и знаменатель дроби на выражения, сопряжённые к данным.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2\cdot(2+2)}{3+3} = \frac{4}{3}.$$

2. Найдите приращение функции $y = x^2$ при переходе значения аргумента от 3 до 3,5.

Решение.

Способ 1. Имеем $f(x) = x^2$, а $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2$, тогда

$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$
$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2$,

$\Delta f(x) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

По этой формуле можно вычислить значение $\Delta f(x)$ для любых x и Δx. В частности, в нашем примере $x = 3$, $\Delta x = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$, поэтому $\Delta f(x) = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2 = 3 + 0{,}25 = 3{,}25$.

Способ 2. $f(3) = 3^2$, $f(3{,}5) = 3{,}5^2$.
$\Delta f(x) = f(3{,}5) - f(3) = 3{,}5^2 - 3^2 = (3{,}5-3)(3{,}5+3) = 0{,}5 \cdot 6{,}5 = 3{,}25$.

3. Для функции $y = x^3$ найдите:

а) приращение функции при переходе от некоторой точки x к точке $x + \Delta x$;

б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Решение. а) $f(x) = x^3$, $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3$.

$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 +$
$+ (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2)$;

б) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$,

поскольку $\Delta x \to 0$, а x — не зависит от Δx.

Выполните устно

381. Для каждой из функций, график которой изображён на рисунке 50, установите:

а) определена ли эта функция в точке x_0;

б) существует ли предел функции в точке x_0;

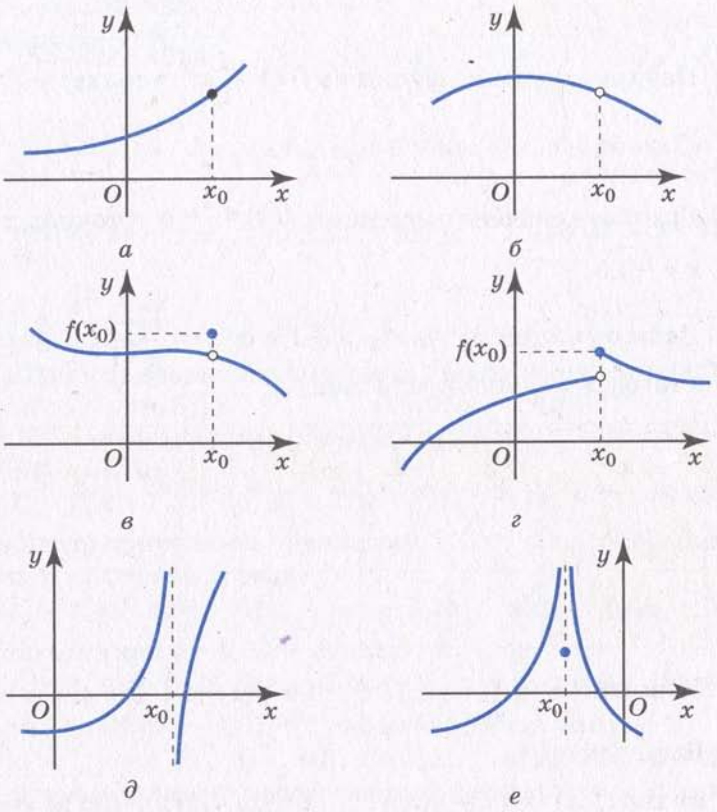


Рис. 50

в) если предел в точке x_0 существует, то равен ли он значению функции в этой точке?

382. Имеет ли функция $f(x)=\frac{5}{x}$ предел в точке:

а) $x_0=2$; б) $x_0=-10$?

383. Какая из функций, графики которых изображены на рисунке 50, является непрерывной: а) для всех $x<0$; б) для всех $x>0$; в) на всей области определения?

384. Вычислите предел функции $y=f(x)$ в точке $x_0=0$, если:

а) $f(x)=x-5$; б) $f(x)=x^2-x+7$; в) $f(x)=\sqrt{2x+1}$;

г) $f(x)=3x^2-x$; д) $f(x)=\frac{x}{x+7}$; е) $f(x)=\frac{7}{x+7}$.

Уровень А

385. Найдите значение функции $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ в точке:

а) $x=5$; б) $x=-\frac{1}{2}$.

386. Сравните значения функции $f(x)=\frac{1}{x}+x$ в точках $x=-2$ и $x=-0{,}5$.

387. Даны функции $f(x)=x^2-x+1$ и $\varphi(x)=\frac{x^3+1}{x+1}$. Перерисуйте в тетрадь и заполните таблицу.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$\varphi(x)$							

388. Известно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=2$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=3$.

Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+\varphi(x)-g(x))$; б) $\lim\limits_{x\to x_0}(2f(x)-\varphi(x)+g(x))$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)\cdot g(x))$; г) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi^2(x)\cdot g(x))$.

389. Вычислите предел функции $y=f(x)$ в точке $x_0=1$, если:

а) $f(x)=2x-5$; б) $f(x)=3x^2-x+1$; в) $f(x)=\frac{5}{x-3}$.

390. Вычислите предел функции $y=\varphi(x)$ в точке $x_0=2$, если:

а) $\varphi(x)=3x^3-x$; б) $\varphi(x)=\frac{x-2}{x+2}$; в) $\varphi(x)=x^2-7x+3$.

391. Вычислите предел функции:

а) $f(x)=2x^2-3$ в точке $x=5$; $x=10$; $x=50$;

б) $\varphi(x)=(1+x)^2$ в точке $x=0{,}5$; $x=1$; $x=-0{,}5$;

в) $\varphi(x)=x+\frac{1}{x^2}$ в точке $x=-2$; $x=-1$; $x=3$.

Вычислите (392—393).

392. а) $\lim\limits_{x\to 10}(12x-30)$; б) $\lim\limits_{x\to 5}(8-3x)$; в) $\lim\limits_{x\to 5}(2x^2-0{,}5)$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4x}{3x+5x^2}$.

393. а) $\lim\limits_{x\to 0}(2+x+x^2)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(7-3x^2)$; в) $\lim\limits_{x\to 3}x(x+5)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{3x-x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x}{x^2-5}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{3-x}$.

394. Найдите приращение аргумента при переходе от 5 до:
а) 5,5; б) 5,1; в) 5,05; г) 5,001.

395. Найдите приращение аргумента при переходе от точки x_0 к точке x, если:
а) $x_0=1$, $x=1{,}3$; б) $x_0=3$, $x=3{,}5$; в) $x_0=2{,}1$, $x=2{,}7$.

396. Найдите приращение функции $y=3x+1$ при переходе от точки x_0 к точке x, если:
а) $x_0=2$, $x=2{,}3$; б) $x_0=5$, $x=5{,}5$; в) $x_0=2{,}5$, $x=2{,}7$.

397. Для функции $y=0{,}5x-3$ найдите x и Δy, если:
а) $x_0=1$, $\Delta x=0{,}2$; б) $x_0=3$, $\Delta x=0{,}4$; в) $x_0=2{,}1$, $\Delta x=0{,}9$.

398. Для функции $y=10x-1$ найдите Δx и Δy, если:
а) $x_0=1$, $x=1{,}2$; б) $x_0=3$, $x=3{,}1$; в) $x_0=2{,}1$, $x=2{,}5$.

399. Приведите пример возрастающей функции, непрерывной на всей области определения. Постройте её график.

400. Приведите пример убывающей функции, непрерывной на всей области определения. Постройте её график.

401. Постройте график функции, которая не является непрерывной в точках:
а) -1 и 1; б) -1; 0 и 1; в) 0 и 2; г) -3 и 1.

Уровень Б

402. Известно, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=5$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=2$.

Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)+1}{g(x)-\varphi(x)}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2f(x)}{g(x)\cdot\varphi(x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{1-5\varphi(x)}$; г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)+\varphi(x)}{g(x)\cdot\varphi(x)}$.

403. Докажите, что предел многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ при $x \to x_0$ равен значению этого многочлена при $x = x_0$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

404. Если $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлены, причём $Q(x_0) \neq 0$, то предел дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ при $x \to x_0$ равен его значению при $x = x_0$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$. Докажите.

405. Вычислите предел функции $f(x)$ в той точке, в которой функция не определена, если:

а) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$; б) $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{2x-1}$; в) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$.

Вычислите пределы (**406—409**).

406. а) $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x \to -3}\left(\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

407. а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

408. а) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{(x+2)(x-3)}$; б) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4+x^2-12}$.

409. а) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-5x+2}{8x^3-4x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-5x^2+2x+2}{x^2+5x-6}$.

410. Найдите приращение функции $y = 2\sin x \cos x$ при переходе от точки $x_0 = 0$ к точке x, если:

а) $x = \dfrac{\pi}{8}$; б) $x = \dfrac{\pi}{12}$; в) $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

411. Для функции $y = 0{,}5(\cos 4x + 1)$ найдите Δx и Δy, если:

а) $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$; б) $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{12}$; в) $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{8}$.

412. Количество мышей в колонии записывали еженедельно и построили соответствующий график (*рис. 51*). Оцените среднюю скорость роста популяции мышей: а) с 4 по 6 неделю; б) за первые пять недель.

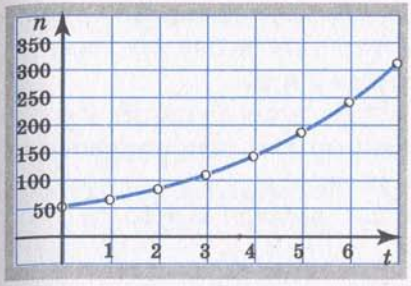


Рис. 51

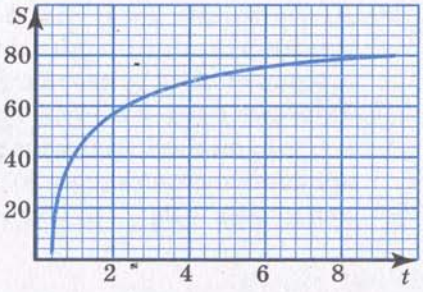


Рис. 52

413. На рисунке 52 представлен график движения тела. Оцените среднюю скорость движения за время t (время t — в секундах; путь s — в метрах), если: а) $1 \le t \le 4$; б) $4 \le t \le 8$.

414. Известно, что для некоторой фирмы затраты на выпуск x единиц продукции описываются функцией: $K(x) = 0{,}002x^3 - 0{,}3x^2 + 20x + 100$ (грн), а доход, полученный от реализации x единиц продукции, можно вычислить по формуле $R(x) = 200\,x - 0{,}05x^2$ (грн). Определите приращение затрат и дохода при увеличении выпуска продукции: а) с 20 до 100; б) с 30 до 50.

415. По некоторым подсчётам определено, что при производстве x единиц продукции ежемесячно фирма имеет расходы $K(x)$, выражающиеся формулой $K(x) = 150 + 30\,x$ (грн), а доход $R(x)$, полученный от продажи x единиц этой же продукции, составляет $R(x) = 90\,x - 0{,}02\,x^2$ (грн). Если фирма увеличит ежемесячный выпуск продукции с 300 до 320 единиц, как изменятся её расходы, доходы, прибыль?

416. Постройте график функции $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{2 - x}$. Непрерывна ли она в точке $x_0 = -1$? А в точке $x_0 = 2$?

417. Определена ли функция $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{x + 3}$ в точке $x = -3$? Существует ли предел данной функции в этой точке? Если да, то чему он равен?

418. Изобразите график любой функции, которая не является непрерывной в точках $x = n$, где $n \in N$.

419. Изобразите график любой функции, которая не является непрерывной в точках $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$.

420. Для функции $y = 1 - 5x^2$ найдите предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

421. Найдите предел отношения приращения функции $y = f(x)$ к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если:

а) $f(x) = -x + 3$; б) $f(x) = 3x^2$; в) $f(x) = x^3 + 1$.

Уровень В

422. Для функции $y = \sqrt{x}$ найдите:

а) приращение функции при переходе от некоторой точки x к точке $x + \Delta x$;

б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

423. Найдите предел отношения приращения функции $y = f(x)$ к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если:

а) $f(x) = ax + b$; б) $f(x) = ax^2$; в) $f(x) = x^{-1}$.

424. Пользуясь определением, докажите, что функция $f(x) = 2x^2 - 1$ непрерывна на всей области определения.

425. Пользуясь определением, докажите непрерывность функции $\varphi(x)$ на интервале $(-\infty; \infty)$, если:

а) $\varphi(x) = 5x + 3$; б) $\varphi(x) = x^3 + x$; в) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 1$.

Вычислите (**426—427**).

426. а) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{1+3x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$;

в) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{5-x} - \sqrt{2x+2}}{x^2 - 4x + 3}$; г) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$.

427. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}$.

Упражнения для повторения

428. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если его длину увеличить на 20 %, а ширину — на 10 %?

429. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-2y^{\frac{1}{2}}}{x-4y}$; в) $\dfrac{x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$.

430. Решите неравенство:

а) $|x|>2x$; б) $|x|\geq -x$; в) $x|x+1|\geq 0$; г) $x|x-1|<0$.

§11. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Подавляющее большинство функций, с которыми вы ознакомились ранее, определены на бесконечных промежутках. Исследуя такие функции, желательно установить их поведение для сколь угодно больших по модулю значений аргумента x, т.е. при $x\to\infty$ и при $x\to-\infty$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале $(a;+\infty)$.

Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ *на бесконечности* (при $x\to+\infty$), если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $M(\varepsilon)>0$, что для всех $x>M(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Пишут: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале $(-\infty;b)$.

Число B называется *пределом функции* $y=f(x)$ *на бесконечности* (при $x\to-\infty$), если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $M(\varepsilon)>0$, что для всех $x<-M(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-B|<\varepsilon$.

Пишут: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале $(-\infty;+\infty)$.

Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ *на бесконечности* (при $x\to\infty$), если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $M(\varepsilon)>0$, что для всех $|x|>M(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Пишут: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

Геометрически это означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $M(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $x\in(-\infty;-M)$ или $x\in(M;+\infty)$ соответствующие значения функции $y=f(x)$ попадают в

ε-окрестность точки A, то есть соответствующие точки графика этой функции лежат в полосе, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$ (*рис. 53*).

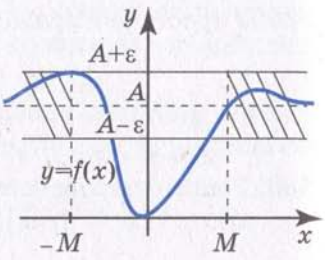


Рис. 53

Для предела функции на бесконечности выполняются те же свойства и теоремы о пределах, что и для предела функции в точке (см. с. 102), а также те правила, которые используются при вычислении предела числовой последовательности. А именно:

1. *Для того чтобы вычислить предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \to \infty$ числитель и знаменатель дроби имеют пределы, которые равны бесконечности, необходимо сначала каждый член многочленов числителя и знаменателя дроби разделить на степень x с наибольшим показателем, а затем находить предел.*

Пример 1. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 4x^3 + 5}{x^3 - 8x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 4x^3 + 5}{x^3 - 8x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{3}{x} - 4 + \dfrac{5}{x^3}}{1 - \dfrac{8}{x^2}} = -4$.

2. *Для того чтобы вычислить предел функции, содержащей иррациональные выражения, в случае, когда каждый из слагаемых имеет бесконечный предел, необходимо умножить и разделить выражение, задающее функцию, на выражение, сопряжённое к нему, после этого выполнить необходимые упрощения (приведение подобных членов, сокращение и т. д.) и вычислить предел.*

Пример 2. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - x\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - x\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 5} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 5} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 + 5} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 5 - x^2}{\left(\sqrt{x^2 + 5} + x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\left(\sqrt{x^2 + 5} + x\right)} = 0.$$

Исследуя функции, желательно также установить их поведение для тех значений аргумента x, в которых функция бесконечно возрастает или убывает.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$ (имеющей предел ∞), если для произвольного $M > 0$ существует такое число $\delta(M) > 0$, что для всех x таких, что $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, или $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Понятие предела функции на бесконечности и бесконечного предела используются для нахождения асимптот.

Прямая l называется *асимптотой кривой*, если расстояние d от точки $M(x; f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки M в бесконечность.

Асимптотами, например, есть оси координат для графика функции $y = \frac{1}{x}$:

$x = 0$ — вертикальная асимптота;

$y = 0$ — горизонтальная асимптота.

Кривая $y = f(x)$ имеет *горизонтальную асимптоту* $y = b$, если существует конечный предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ и этот предел равен b, то есть $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Пример 3. Найдите горизонтальную асимптоту кривой $y = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Решение. Вычислим предел $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$. Следовательно, $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что называют пределом функции $y = f(x)$ на бесконечности?
2. Приведите примеры функций, имеющих предел на бесконечности.
3. Как обозначают предел функции $y = f(x)$ на бесконечности?
4. Как вычислить предел дробно-рациональной функции на бесконечности?
5. Какая функция называется бесконечно большой?
6. Что такое асимптота кривой?
7. Какие бывают асимптоты?
8. При каких условиях кривая имеет горизонтальную асимптоту?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Исследуйте поведение функции $y = 5^x$, если: а) $x \to +\infty$; б) $x \to -\infty$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^x = 5^{\lim\limits_{x\to\infty} x} = +\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5^x = 5^{\lim\limits_{x\to-\infty} x} = 5^{-\lim\limits_{x\to+\infty} x} = \dfrac{1}{5^{\lim\limits_{x\to+\infty} x}} = 0$.

2. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}=\frac{2}{2}=1.$$

3. Найдите горизонтальные асимптоты кривой:

а) $f(x) = 2^x + 3$; б) $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$.

Решение. а) Вычислим пределы при $x \to \pm\infty$. Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2^x+3)=\lim_{x\to+\infty}2^x+\lim_{x\to+\infty}3=2^{\lim\limits_{x\to+\infty}x}+3=\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2^x+3)=\lim_{x\to-\infty}2^x+\lim_{x\to-\infty}3=0+3=3.$$

Следовательно, $y = 3$ — горизонтальная асимптота для $x \to -\infty$, а для $x \to +\infty$ — асимптоты нет.

б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-x}{x+3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}=\dfrac{0-1}{1+0}=-1.$

Следовательно, $y = -1$ — горизонтальная асимптота.

Выполните устно

431. Какая из функций, приведённых ниже, имеет конечный предел, если $x \to +\infty$:

а) $y = x^2$; б) $y = x^{-2}$; в) $y = \operatorname{arctg} x$; г) $y = \sin x$?

432. Какая из функций, приведённых ниже, имеет конечный предел, если $x \to -\infty$:
а) $y = x^3$; б) $y = x^{-1}$; в) $y = \operatorname{arcctg} x$; г) $y = 0{,}5^x$?

433. Какая из функций, приведённых ниже, имеет бесконечный предел, если $x \to +\infty$:
а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x$; в) $y = \ln x$; г) $y = \operatorname{arctg} x$?

434. Вычислите:
а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x}{5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x$.

435. Приведите пример функции, которая имеет горизонтальную асимптоту.

436. Приведите пример функции, которая имеет вертикальную асимптоту.

Уровень А

Вычислите, используя теоремы о пределах (**437—438**).

437. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^9}+4\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x^5}+\frac{4}{x^2}+9\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x^3}+\frac{7}{x}-2\right)$.

438. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(12-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{16}{x^7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}-3\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$.

Найдите предел (**439—442**).

439. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-4}{x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-4}{2x+7}$.

440. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+7x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x-1}{3x^2-4x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-5x}{2x^2-9x}$.

441. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-x^2+1}{5x^2-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2x^2}{3x^2+2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-8}{x^3+18}$.

442. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+9}{x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-8}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2+5x+2}{6x^2+5x-1}$.

Уровень Б

443. Постройте график функции, которая в точке $x_0 = 1$ имеет бесконечный предел.

444. Постройте график функции, которая на бесконечности имеет предел, равный числу 2.

Найдите предел (445—450).

445. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(x-1)^3}{x^3-1}$.

446. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-7}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

447. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2x+5}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-1}}{x-2}$.

448. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5-3x}-\sqrt{-3x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2}}$.

449. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2^x+1}$.

450. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{x+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x+1}}$.

Найдите горизонтальные асимптоты кривой (451—452).

451. а) $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$; б) $y=\dfrac{2}{(x-2)(x-1)}$; в) $y=\dfrac{3x+5}{x+3}$.

452. а) $y=\dfrac{2}{x+3}$; б) $y=\dfrac{3x}{5(x+2)}$; в) $y=\dfrac{9-2x}{x-3}$.

Уровень В

453. Известно, что нечётная функция имеет единственную горизонтальную асимптоту. Запишите уравнение этой асимптоты.

454. Найдите горизонтальные асимптоты кривой:

а) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=e^{\frac{1}{x^3-1}}$; в) $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$.

Найдите предел (455—457).

455. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{4+x^2}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+9x^2}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1+9x^2}-\sqrt{x^2-1}}$.

456. а) $\lim\limits_{x\to\infty}5^{\frac{3x}{6x-2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}6^{\frac{x-7}{x^2+3}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}0{,}1^{\frac{x^2}{x-1}}$.

457. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)\operatorname{arctg}x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)\operatorname{arctg}x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+8}}{x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+8}}{x+3}$.

Упражнения для повторения

458. Разложите многочлен на множители:

а) $2a^4-13a^2+6$; б) $64a^6-1$; в) $3a^4+12$.

459. Что больше $\sqrt{2010}-\sqrt{2012}$ или $\sqrt{2011}-\sqrt{2013}$?

460. Решите уравнение:

а) $\lg(3-x^2)-\lg(x-3)=0$; б) $x^{2+\lg x}=1000$.

§12. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ТОЧКЕ И НА ПРОМЕЖУТКЕ

С первыми сведениями о непрерывных и разрывных функциях вы были ознакомлены в § 10. Рассмотрим понятие непрерывности функции и свойства непрерывных функций подробнее.

Пусть функция $y=f(x)$ определена во всех точках некоторого промежутка $(a;\ b)$ и x_0 — внутренняя точка этого промежутка. Функция $y=f(x)$ в точке x_0 будет непрерывной тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) в точке x_0 функция $y=f(x)$ определена (существует число $f(x_0)$);

2) в точке x_0 существует предел функции $y=f(x)$ (существует $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$);

3) в точке x_0 предел функции равен значению функции ($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$).

Использование этих условий существенно упрощает вычисление пределов непрерывных функций. Для вычисления предела $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ непрерывной в точке x_0 функции $y=f(x)$ достаточно вычислить значение функции в этой точке, т.е. $f(x_0)$.

Над непрерывными функциями можно выполнять арифметические операции.

Теорема. **Пусть $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда их сумма, разность, произведение и частное (при усло-**

вии, что знаменатель не равен нулю) тоже непрерывны в точке x_0, т. е. $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ — непрерывные в точке x_0 функции.

Доказательство. Поскольку по определению непрерывные в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы, которые равны $f(x_0)$ и $g(x_0)$, то по свойству предела суммы, разности, произведения и частного пределы указанных функций существуют и соответственно равны $f(x_0)+g(x_0)$, $f(x_0)-g(x_0)$, $f(x_0)\cdot g(x_0)$, $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ $\left(g(x_0)\neq 0\right)$. Но эти величины равны значениям соответствующих функций. Следовательно, указанные функции по определению непрерывности являются непрерывными в точке x_0.

Пример 1. Для каких значений x функция $f(x)=\frac{3x^2+x+5}{x^2-6x+8}$ будет непрерывной?

Решение. Дробно-рациональная функция непрерывна при условии, что знаменатель не равен нулю. Уравнение $x^2-6x+8=0$ имеет корни $x_1=2$, $x_2=4$. Следовательно, функция непрерывна на множестве $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ 4)\cup(4;\ \infty)$.

Свойства функций, непрерывных на промежутке.

Функция называется *непрерывной на промежутке*, если она непрерывна в каждой его точке.

Теорема Больцано—Коши. **Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то на интервале $(a;\ b)$ обязательно существует точка c, такая, что $f(c)=0$.**

Геометрический смысл (*рис. 54*) этой теоремы состоит в том, что непрерывная кривая при переходе из одной полуплоскости в другую, границей которых является ось Ox, пересекает эту ось. Эта теорема применяется при решении уравнений.

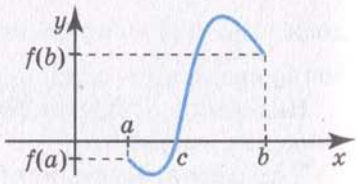


Рис. 54

Теорема Больцано—Коши (*о промежуточном значении функции*). **Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и при-**

нимает на его концах разные значения, то для любого числа A, находящегося между числами $f(a)$ и $f(b)$, на интервале $(a; b)$ обязательно существует точка c, такая, что $f(c) = A$.

Геометрически это означает, что прямая $y = A$ пересекает график функции $y = f(x)$ по крайней мере в одной точке.

Теорема Вейерштрасса (*об ограниченности непрерывной функции*). **Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она на этом отрезке ограничена.**

Теорема Вейерштрасса (*о наибольшем и наименьшем значениях функции на отрезке*). **Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она на этом отрезке имеет наибольшее и наименьшее значения.**

Замечание! Разрывные функции, вообще говоря, этих свойств не имеют.

Точки разрыва и их классификация. Точка, в которой функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва функции*, а сама функция называется *разрывной* в этой точке.

Точка x_0 будет точкой разрыва функции $y = f(x)$, если выполняется одно из условий:

1) функция в точке x_0 не определена;

2) не существует предела функции в точке x_0 или он равен бесконечности;

3) предел функции в точке x_0 не совпадает со значением функции в этой точке.

Различают два вида точек разрыва — первого рода и второго рода (*рис. 55*).

Исследуя точки разрыва, используют односторонние пределы. Это означает, что рассматривают поведение функции для значений x только справа или слева от точки x_0. Таким образом получают соответственно правосторонний или левосторонний пределы.

Рис. 55

Обозначают:

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ — правосторонний предел функции $y = f(x)$ в точке x_0;

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ — левосторонний предел функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Точку x_0 называют *точкой разрыва первого рода*, если в ней существуют конечные односторонние пределы (*рис. 56, а*).

Точку x_0 называют *точкой разрыва второго рода*, если хоть один из односторонних пределов является бесконечным, либо вообще не существует (*рис. 56, б*).

Если левосторонний и правосторонний пределы в точке x_0 — конечные и равные между собой, но не равны значению функции в этой точке, то точку x_0 называют *устранимой точкой разрыва* (*рис. 56, в*).

Пример 2. Найдите точки разрыва функции $y = \frac{1}{x}$ и выясните их характер.

Решение. Поскольку на ноль делить нельзя, то точкой разрыва данной функции является $x = 0$. Для выяснения её характера вычислим односторонние границы данной функции в этой точке.

$\lim\limits_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = \infty$. Итак, односторонние пределы равны бесконечности, поэтому $x = 0$ — точка разрыва второго рода.

Пример 3. Исследуйте функцию $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \le 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ на непрерывность и постройте её график.

Решение. На каждом из интервалов $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция непрерывна как многочлен. Поскольку вся область определения функции разделена на два промежутка точкой $x = 0$, то в этой точке функция может иметь разрыв. Выясним, существу-

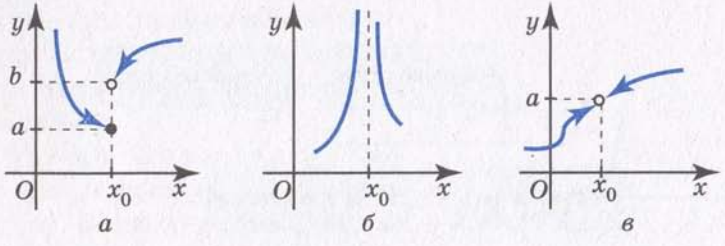


Рис. 56

ет ли предел функции в этой точке. Если $x \to 0$ слева, то функция имеет вид $f(x)= x^2+2$ и $\lim\limits_{x\to -0}\left(x^2+2\right)=2$, а при $x \to 0$ справа $f(x) = x + 1$ и $\lim\limits_{x\to +0}(x+1)=1$. Следовательно, $x = 0$ — точка разрыва первого рода, *неустранимый разрыв*. График этой функции изображён на рисунке 57.

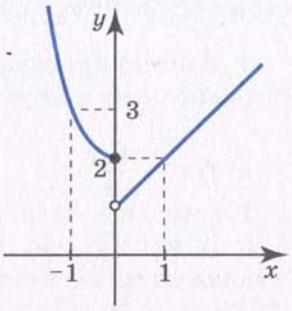


Рис. 57

Односторонние пределы используют для нахождения вертикальных асимптот кривых.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* кривой, если при $x \to a$ (справа или слева) значение функции стремится к бесконечности, т.е. выполняется одно из условий:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x)=\infty .$$

Например, ось Oy является вертикальной асимптотой для графиков функций $y = x^{-n}$, $n \in N$ (см. рис. 17, *б*) и $y = \log_a x$ (см. рис. 33).

Пример 4. Найдите вертикальные асимптоты кривой $y=\dfrac{1}{x+2}$.

Решение. Поскольку функция не определена в точке $x = -2$, то в этой точке кривая может иметь вертикальную асимптоту. Вычислим пределы:

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{1}{x+2}=-\infty ; \quad \lim_{x\to -2+0}\frac{1}{x+2}=+\infty .$$

Следовательно, $x = -2$ — вертикальная асимптота данной кривой.

Замечание! Если $x = a$ — вертикальная асимптота функции $y = f(x)$, то $x = a$ — точка разрыва второго рода.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Сформулируйте необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке.
2. Сформулируйте определение функции, непрерывной на промежутке.
3. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на промежутке.
4. Что такое точки разрыва? Какие есть виды точек разрыва?
5. Как найти вертикальные асимптоты кривой?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Исследуйте заданные функции на непрерывность и выясните характер их точек разрыва:

а) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; б) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

Р е ш е н и е. Заданные в условии функции элементарные, а потому непрерывные в каждой точке области определения, а именно на множестве $(-\infty; 0)\cup(0; \infty)$.

а) Функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x=0$, следовательно, эта точка является точкой разрыва. Поскольку $\lim\limits_{x\to\pm0} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm0}\frac{\sin x}{x}=1$, то $x=0$ является точкой разрыва первого рода, устранимый разрыв.

б) Функция $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ не определена в точке $x=0$, эта точка является точкой разрыва. Поскольку $\lim\limits_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}}=0$ и $\lim\limits_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, то $x=0$ является точкой разрыва второго рода.

2. Заданные функции доопределить в точке $x=0$ так, чтобы они стали непрерывными в этой точке:

а) $f(x)=\frac{\operatorname{tg}x}{x}$; б) $f(x)=\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

Р е ш е н и е.

а) Имеем $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=1$. Положив $f(0)=1$, получим, что $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$, т.е. функция непрерывна в точке $x=0$. Итак, $f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{tg}x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

б) Вычислим предел заданной функции в точке $x=0$. Имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{4}.$$

Если теперь за значение функции в точке $x = 0$ взять число $\frac{1}{4}$, то функция станет непрерывной в этой точке.

Итак, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}, & x \neq 0, \\ \dfrac{1}{4}, & x = 0. \end{cases}$

3. Имеет ли уравнение $x^3 - 3x - 1 = 0$ хотя бы один действительный корень на отрезке $[0; 2]$?

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Эта функция непрерывна на отрезке $[0, 2]$ и на его концах приобретает различные по знаку значения: $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 1 > 0$. Итак, согласно теореме Больцано—Коши существует по крайней мере одна точка c $(0 < c < 2)$, в которой значение функции равно нулю. Число c и является корнем заданного уравнения.

4. Имеет ли горизонтальные и вертикальные асимптоты кривая $y = 2x + \frac{1}{x}$?

Р е ш е н и е. 1) Найдём вертикальные асимптоты. Заданная функция не определена в точке $x = 0$. Поскольку $\lim\limits_{x \to 0}\left(2x + \frac{1}{x}\right) = \infty$, то прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

2) Найдём горизонтальные асимптоты.

$$\lim_{x \to \infty}\left(2x + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty}\frac{2x^2 + 1}{x} = \infty.$$

Горизонтальных асимптот нет.

Выполните устно

461. Приведите три примера функций, непрерывных в каждой точке области определения.

462. Обоснуйте непрерывность функций:

а) $y = x^2 + \sin x$; б) $y = xe^x$; в) $y = \sqrt[3]{x} - \cos x$; г) $y = 5^{2x}$.

463. Назовите несколько функций, которые имеют точку разрыва второго рода.

464. Имеет ли точки разрыва функция:

а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=1$; в) $y=\frac{x-3}{x-3}$; г) $y=\operatorname{tg}x$?

465. Сколько точек разрыва имеет функция:

а) $y=\frac{x-3}{x^2-9}$; б) $y=\frac{x^2-4}{x+2}$; в) $y=\frac{4}{x^3+1}$; г) $y=\frac{1}{\sin x}$?

Уровень А

При каких значениях x функция будет непрерывной (**466—467**)?

466. а) $f(x)=\frac{3x^2+x+5}{2x^2+6x+4}$; б) $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-6x+8}$.

467. а) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$.

468. Докажите, что функция $f(x)=\frac{x}{4+x^2}$ непрерывна при произвольном значении x.

469. Найдите точки разрыва функции $y=\frac{1}{x-2}$ и выясните их характер.

470. Исследуйте функцию $y=f(x)$ на непрерывность в точках 1, 2, −1, 0, если:

а) $y=\frac{x^2-1}{9}$; б) $y=\frac{1}{x+1}$; в) $y=\frac{x}{x^2+1}$; г) $y=\frac{2}{x}$.

Уровень Б

471. Найдите вертикальные асимптоты кривой:

а) $y=\frac{4}{1-x}$; б) $y=\frac{x^3}{x+4}$; в) $y=\frac{3}{x+3}$;

г) $y=\frac{4}{1-x^2}$; д) $y=\frac{x^3}{x^2-4}$; е) $y=\frac{x}{4-x^2}$.

472. Всегда ли будет разрывной в заданной точке x_0 сумма (произведение) двух функций, если обе функции в этой точке разрывные? Приведите пример.

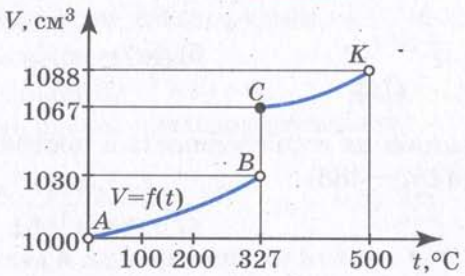


Рис. 58

473. Всегда ли будет разрывной в заданной точке x_0 сумма (произведение) двух функций, если только одна из функций в этой точке разрывная? Приведите пример.

474. На рисунке 58 изображён график зависимости объёма куска свинца от температуры нагрева. Является ли эта зависимость функцией? Имеет ли функция точки разрыва? Установите их характер. Приведите примеры других разрывных функций, которые описывают физические или химические процессы.

475. Исследуйте функцию на непрерывность и постройте её график:

а) $f(x)=\begin{cases}2x^2-1, & x\le 1,\\ x-4, & x>1;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\ge 0,\\ \dfrac{1}{2x}, & x<0.\end{cases}$

Доопределите функцию $f(x)$ в точке $x=0$ так, чтобы она стала непрерывной в этой точке (**476—477**).

476. а) $f(x)=\dfrac{3x^3-2x}{5x}$; б) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}3x}{4x}$.

477. а) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

478. Докажите, что уравнение $x^4-3x-1=0$ имеет хотя бы один действительный корень на отрезке $[1;\,2]$.

479. Докажите, что уравнение $x^3+4x+3=0$ имеет хотя бы один действительный корень на отрезке $[-1;\,0]$.

Уровень В

Исследуйте заданные функции на непрерывность и выясните характер точек разрыва (**480—481**).

480. а) $f(x)=\dfrac{|x-4|}{x^2-16}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$.

481. а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1;\end{cases}$ б) $f(x)=e^{\frac{1}{x+2}}$.

Исследуйте функцию на непрерывность и постройте схематически её график (**482—483**).

482. а) $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}$; б) $f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}$;

в) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le -1,\\ x^2+1, & -1<x\le 1,\\ -x+3, & x>1;\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}x+4, & x<-1,\\ x^2+2, & -1\le x<1,\\ 2x, & x\ge 1.\end{cases}$

483. а) $f(x)=12^{\frac{1}{x}}$; б) $f(x)=3^{\frac{1}{4-x}}$;

в) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x<1,\\ x, & x\ge 1;\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ -(x-1)^2, & 0<x<2,\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$

484. Исследуйте функцию на непрерывность в точке x_0:

а) $f(x)=\dfrac{5}{2+3^{\frac{1}{2-x}}}$, $x_0=2$; б) $f(x)=3+\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{1-x}}}$, $x_0=1$.

485. Докажите, что уравнение $x^5+x-\dfrac{1}{x}=0$ имеет хотя бы один действительный корень на отрезке $[0{,}5;\ 1]$.

486. Доопределите функцию $f(x)$ в точке $x=0$ так, чтобы она стала непрерывной в этой точке:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; б) $f(x)=\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

487. При каком значении параметра a функция $f(x)$ будет непрерывной:

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a+x}{2}, & x\ge 0,\\ e^x, & x<0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\ge 1,\\ \sqrt{a-x}, & x<1?\end{cases}$

Упражнения для повторения

488. Решите неравенство:

а) $x(x-5)(x+3)(x^2-1)>0$; б) $(x-1)(x+3)(x^2-1)>0$.

489. Найдите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+5n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

490. Из пункта А одновременно и в одном направлении выехали два велосипедиста со скоростями 18 км/ч и 24 км/ч. Через 1 час вслед за ними выехал автомобиль, который настиг сначала одного велосипедиста, а через 10 мин — и второго. Найдите скорость автомобиля.

§ 13. КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНАЯ

Вы уже знаете, какую прямую называют касательной к окружности. А что понимают, например, под касательной к синусоиде? Прямая a может быть касательной к синусоиде в какой-либо её точке T и пересекать эту синусоиду в других точках (*рис. 59*). Что же понимают под касательной к графику функции?

Пусть даны график функции $y=f(x)$ и на ней точка T, которая не является концом графика (*рис. 60*). Обозначим на данном графике по разные стороны от T произвольные точки T_1 и T_2. Прямые TT_1 и TT_2 — секущие. Если же точки T_1 и T_2, двигаясь по графику, приближать достаточно близко к T, то TT_1 и TT_2 как угодно близко будут приближаться к некоторой прямой a. Такую прямую a (если она существует) называют *касательной к графику функции* $y=f(x)$ в точке T.

Если график функции такой, как показано на рисунке 61, то при неограниченном приближении точек T_1 и T_2 к точке T предельные положения секущих — прямые TT_1 и TT_2 — не совпадут. Говорят, что в точке T касательной к графику функции не

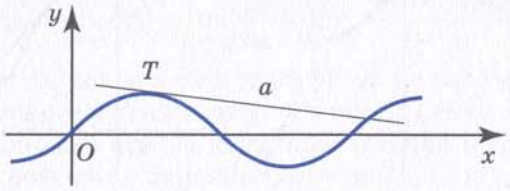


Рис. 59

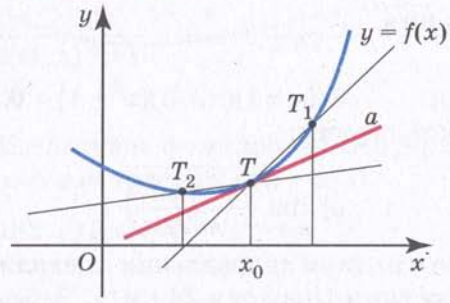


Рис. 60

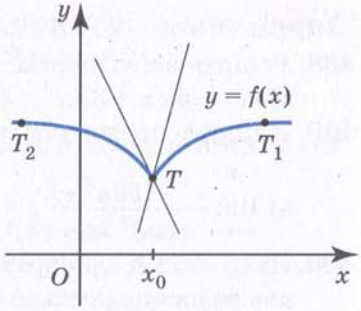


Рис. 61

существует. И если T — крайняя точка графика, то касательной к нему в точке T не существует.

Понятие касательной к графику часто используют для исследования функций. Рассмотрим этот вопрос сначала в общем виде.

Касательная — это прямая. Её уравнение имеет вид $y = kx + b$, где k — *угловой коэффициент* — тангенс угла между лучом касательной, расположенным выше оси Ox, и положительным направлением этой оси. Обратите внимание на угловой коэффициент k касательной, проведённой к графику какой-либо функции в его точке с абсциссой x_0. Если число x_0 принадлежит промежутку возрастания функции, то соответствующее значение k положительное (*рис. 62*). Если x_0 принадлежит промежутку убывания функции, то k — отрицательное (*рис. 63*). И наоборот: если каждому значению x_0 из некоторого промежутка $(a; b)$ соответствует положительное значение k, то на $(a; b)$ данная функция возрастает; если каждому значению x_0 из некоторого промежутка $(c; d)$ соответствует отрицательное значение k, то на $(c; d)$ функция убывает. Заслуживают внимания и те точки графика функции, в которых каса-

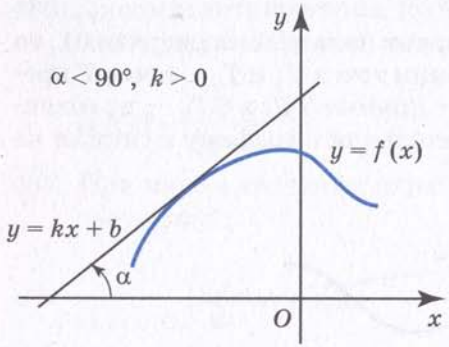


Рис. 62

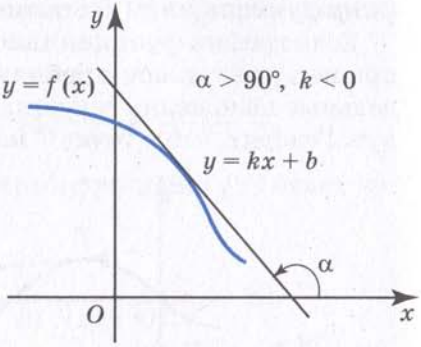


Рис. 63

тельная не существует, и в которых она параллельна оси Ox ($k = 0$).

Итак, зная угловые коэффициенты касательных к графику функции в тех или иных точках, можно сделать вывод, возрастает данная функция в этих точках, или убывает.

Поскольку для исследования функций важно уметь определять угловой коэффициент касательной к её графику, то рассмотрим подробнее связь этого коэффициента с исследуемой функцией.

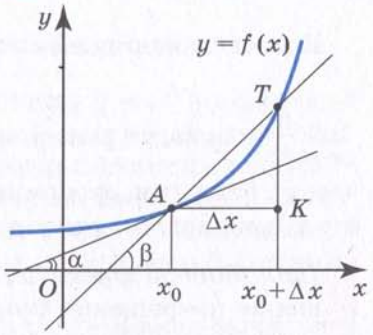


Рис. 64

Пусть даны график функции $y = f(x)$ и на ней точку A, в которой существует касательная к графику (*рис. 64*). Если абсцисса точки A равна x_0, то её ордината — $f(x_0)$. Дадим значению аргумента x_0 приращение Δx. Тогда значению аргумента $x_0 + \Delta x$ на графике функции соответствует точка T с абсциссой $x_0 + \Delta x$ и ординатой $f(x_0 + \Delta x)$.

Через точки A и T проведём прямые AK и TK, параллельные осям абсцисс и ординат. Они пересекутся в некоторой точке K. Тогда $AK = \Delta x$ — приращение аргумента, а $TK = \Delta y$ — приращение функции на $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

Угловой коэффициент секущей AT равен тангенсу угла β, т. е. отношению Δy к Δx.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то секущая AT, поворачиваясь вокруг точки A, приближается к касательной, проведённой в точке A к графику данной функции. Итак, если k — угловой коэффициент этой касательной и $\Delta x \to 0$, то

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to k, \text{ т. е.}$$

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Так определяется угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0, если касательная в ней не параллельна оси Oy. Если касательная к графику функции в некоторой точке параллельна оси Ox, то угловой коэффициент этой касательной равен нулю.

К вычислению значения выражения $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ приводит решение многих задач по механике, электричеству, биологии, экономике, статистике и т. д. Именно поэтому это выражение получило специальное название — *производная*.

Производной функции $f(x)$ **в точке** x_0 **называют предел отношения приращения функции в точке** x_0 **к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю, а предел существует.**

Производную функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают $f'(x_0)$. Её определение записывают также в виде равенства:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \text{ или } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Пример 1. Найдите производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x = 3$.

Решение. Дадим аргументу $x = 3$ приращение Δx. Соответствующее приращение функции $\Delta y = (3 + \Delta x)^2 - 3^2 = 6\Delta x + (\Delta x)^2$.

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 6 + \Delta x$. Если $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to 6$.

Следовательно, $f'(3) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6$.

Ответ. $f'(3) = 6$.

Так решают задачу, пользуясь определением производной функции в точке.

До сих пор речь шла о производной функции в точке. А можно рассматривать производную функции и как функцию. Пусть, например, дана функция $y = x^2$. Найдём её производную в произвольной точке x. Для этого дадим значению x приращение Δx. Соответствующее ему приращение функции

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Поэтому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. Если $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x$.

Имеем $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

Следовательно, производная функции $y = x^2$ в каждой её точке x равна $2x$. Пишут: $(x^2)' = 2x$, или, если $y = x^2$, то $y' = 2x$.

Обратите внимание! Производная функции в точке — это число. Когда же говорят о производной, не указывая «в точке», подразумевают производную как функцию: производной функции $y = x^2$ есть функция $y' = 2x$, производной функции $y = x^3$ есть функция $y' = 3x^2$ и т. д.

Зная это, производную функции в точке можно вычислять проще, чем по определению производной функции в точке.

Пример 2. Дана функция $f(x) = x^2$. Найдите $f'(3)$, $f'(0)$, $f'(-2)$.

Решение. Производной функции $f(x) = x^2$ является функция $f'(x) = 2x$. Поэтому $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$; $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$; $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Нахождение производной называется *дифференцированием*. Функция, которая имеет производную в точке x_0, называется *дифференцируемой в точке x_0*. Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой на этом промежутке*.

Докажем, например, что *линейная функция $y = ax + b$ дифференцируема в каждой точке x*. Действительно, приращению Δx её аргумента x соответствует приращение функции $\Delta y = a(x + \Delta x) + b - (ax + b) = a\Delta x$. Поэтому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$; и если $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to a$. А это и значит, что в каждой точке x функция $y = ax + b$ имеет производную $y' = a$.

Пишут $(ax + b)' = a$.

В частности: $x' = 1$, $b' = 0$.

Производная постоянной равна нулю.

Из курса планиметрии известно, что уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0; y_0)$, имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где k — угловой коэффициент прямой.

Поскольку для касательной к графику функции $y = f(x)$ угловой коэффициент равен значению производной в точке касания ($k = f'(x_0)$), то можем записать *общий вид уравнения касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке касания $(x_0; y_0)$*:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \text{ или } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

До сих пор речь шла о касательных к криволинейным графикам. Но графиком функции может быть и прямая или часть прямой. Поэтому для обобщения договариваются касательной к прямой в любой её точке считать эту самую прямую. Касательной к отрезку или лучу в любой его внутренней точке считают прямую, которой принадлежит этот отрезок или луч.

Выше было установлено, что производная линейной функции равна коэффициенту при переменной, т.е $(ax + b)' = a$.

Полученный результат имеет очевидный геометрический смысл: касательная к прямой — графику функции $y = ax + b$ — есть эта самая прямая, её угловой коэффициент равен a.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое касательная к графику функции в данной точке?
2. Что такое угловой коэффициент касательной?
3. Сформулируйте определение производной функции в данной точке.
4. Как называют операцию нахождения производной функции?
5. Чем является производная функции в точке? А производная функции на промежутке?
6. Чему равна производная постоянной?
7. Какой вид имеет уравнение касательной, проведённой к графику функции $f(x)$ в точке x_0?
8. Что означает запись $(ax + c)' = a$? Каков её геометрический смысл?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите угол, который образует с положительным направлением оси Ox касательная к графику функции $y = 0{,}5x^2 - 2$ в точке $x_0 = 1$.

Р е ш е н и е. Определим сначала угловой коэффициент этой касательной по формуле $k = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, где Δy и Δx — приращения функции и приращения аргумента соответственно.

Найдем приращение функции $y = 0{,}5x^2 - 2$ в точке x_0.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0{,}5(x_0 + \Delta x)^2 - 2 - (0{,}5x_0^2 - 2) =$$

$$= 0{,}5(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) - 2 - 0{,}5x_0^2 + 2 =$$

$$= 0{,}5x_0^2 + x_0\Delta x + 0{,}5\Delta x^2 - 2 - 0{,}5x_0^2 + 2 = x_0\Delta x + 0{,}5\Delta x^2.$$

Найдём угловой коэффициент касательной:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0\Delta x + 0{,}5\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (x_0 + 0{,}5\Delta x) = x_0.$$

Поскольку $x_0 = 1$, то $k = 1$.

Известно также, что $k = \operatorname{tg}\alpha$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = 1$, отсюда $\alpha = 45^\circ$.

2. Докажите, что для функции $y = x^3$ производной есть функция $y' = 3x^2$.

Р е ш е н и е. $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\,\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$;

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2$. Если $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x^2$. А это и означает, что производной функции $y = x^3$ является функция $y' = 3x^2$.

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в его точке с абсциссой $x_0 = 5$.

Р е ш е н и е. *Способ 1*. Уравнение касательной имеет вид $y = kx + b$. Угловой коэффициент k равен значению производной функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 5$. $(x^2)' = 2x$, $k = 2 \cdot 5 = 10$. Значит, уравнение касательной $y = 10x + b$. Координаты точки касания $x_0 = 5$, $y_0 = 25$. Точка с такими координатами принадлежит касательной, поэтому $25 = 10 \cdot 5 + b$, отсюда $b = -25$. Следовательно, уравнение касательной имеет вид: $y = 10x - 25$.

Способ 2. Запишем общий вид уравнения касательной:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Найдём $f'(x)$, $f'(x_0)$, $f(x_0)$:

$$f'(x) = 2x,\ f'(x_0) = 2 \cdot 5 = 10,\ f(x_0) = 5^2 = 25.$$

Подставим найденные значения в уравнение касательной: $y = 10(x - 5) + 25$, или $y = 10x - 25$.

Выполните устно

491. Назовите угловой коэффициент прямой, заданной уравнением: а) $y = 2x$; б) $y = -x + 3$; в) $y = 2 + 0{,}5x$; г) $y = 2$.

492. Может ли прямая, изображённая на рисунках 65 и 66, быть касательной к графику функции $g(x)$?

493. Можно ли провести касательную к графику функции $y = |x|$ в точке: а) $(-1; 1)$; б) $(0; 0)$; в) $(1; 1)$?

494. Можно ли в точке $(0; 0)$ провести касательную к графику функции: а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \frac{5}{x}$; в) $y = \operatorname{tg} x$?

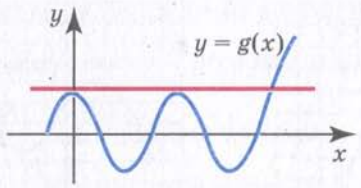


Рис. 65

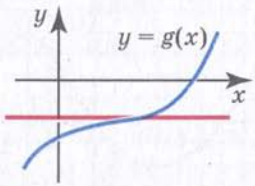


Рис. 66

495. Найдите значение производной функции $y = 2x + 5$ в точке:
а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 0$; в) $x_0 = 10$; г) $x_0 = -10$.

496. Найдите значение производной функции $y = x^2$ в точке:
а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 5$; в) $x_0 = 10$; г) $x_0 = -15$.

497. Чему равна производная функции:
а) $y = 3$; б) $y = x$; в) $y = x^2$; г) $y = x^3$?

Уровень А

498. Укажите несколько точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ (*рис. 66*) образует с положительным направлением оси Ox:
а) острый угол; б) тупой угол.

499. В каких точках касательная к графику функции $f(x)$ (*рис. 67*) параллельна оси Ox?

500. Укажите промежутки, на которых угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ (*рис. 67*) приобретает:
а) положительные значения; б) отрицательные значения.

501. Какие угловые коэффициенты имеют касательные к графику функции $\varphi(x)$ (*рис. 68*), проведённые в точках x_1, x_2?

502. Угловой коэффициент касательной к графику функции $\varphi(x)$ (*рис. 68*), проведённой в некоторой точке, равен k. Существуют ли точки, в которых: а) $k < 0$; б) $k = 0$?

503. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 5)$.

504. Найдите угловой коэффициент прямой, заданной уравнением: а) $y - x + 5 = 0$; б) $x + 2y + 3 = 0$; в) $3x - 5y = 1$.

505. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(-3; 3)$ и $B(2; 5)$.

506. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки: а) $O(0; 0)$ и $A(5; 3)$; б) $K(0; 5)$ и $P(4; 3)$.

507. Постройте график функции $y = \frac{4}{x}$ и проведите к нему касательную в точке $T(2, 2)$. Найдите знак углового коэффициента этой касательной.

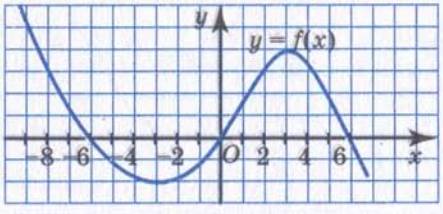


Рис. 67

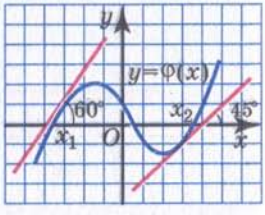


Рис. 68

508. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $(-3; 5)$. Угловой коэффициент касательной к её графику в каждой точке промежутка $(-3, 2)$ положительный, а в каждой точке промежутка $(2, 5)$ отрицательний. Найдите промежутки возрастания и убывания данной функции.

509. Проведите касательную к графику функции $y = x^2$ через его точку с абсциссой $x_0 = 2$. Оцените, чему может быть равен её угловой коэффициент. Воспользовавшись формулой $(x^2)' = 2x$, найдите точное значение углового коэффициента касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 2$.

510. Пользуясь определением производной функции в точке, вычислите:

а) $f'(2)$, если $f(x) = x^2$; б) $f'(-3)$, если $f(x) = 5x^2$;

в) $f'(4)$, если $f(x) = -x$; г) $f'(1)$, если $f(x) = -x^3$.

511. Зная, что $(x^2)' = 2x$, вычислите значение производной функции $y = x^2$ в точке: а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = 3$; в) $x_0 = 0{,}7$.

512. Зная, что $(x^3)' = 3x^2$, вычислите значение производной функции $y = x^3$ в точке: а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 5$; в) $x_0 = 10$.

Уровень Б

513. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^2$ в точке: а) $x_0 = 2{,}5$; б) $x_0 = -2{,}5$; в) $x_0 = \sqrt{5}$.

514. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в его точке с абсциссой: а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = 0$.

515. Найдите координаты точки касания касательной к графику функции $y = x^2$, если угловой коэффициент этой касательной равен 6.

516. На графике функции $y = 0{,}5x^2$ отметьте точки T_1, T_2, T_3 с абсциссами 0, 1, 2 и найдите угловые коэффициенты секущих T_1T_2, T_1T_3, T_2T_3.

517. Докажите с помощью определения, что для функции $y = \frac{1}{x}$ производной будет функция $y' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$.

518. Докажите с помощью определения, что для функции $y = \sqrt{x}$ производной будет функция $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

519. Найдите с помощью определения значение производной функции $y = x^2 + 2x - 1$ в точке $x_0 = 10$.

520. Докажите с помощью определения, что для функции $y = ax^2 + bx + c$ производной будет функция $y = 2ax + b$.

521. Найдите производную функции $y = x^2 + 5x + 6$ в точке:
а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 0$; в) $x_0 = 1$; г) $x_0 = 5$.

522. Используя результат задачи 520, найдите производную функции:
а) $y = 3x^2 + x - 7$; б) $y = -x^2 + 5x$; в) $y = 1 - 6x - x^2$.

523. Перепишите в тетрадь представленную ниже таблицу производных некоторых функций и выучите её наизусть.

$$a' = 0; \quad x' = 1;$$
$$(ax + b)' = a;$$
$$(x^2)' = 2x; \quad (x^3)' = 3x^2;$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Уровень В

524. Докажите с помощью определения, что для функции $y = ax^3 + c$ производной будет функция $y' = 3ax^2$.

525. Найдите производную функции $y = 0{,}1x^3 + 5$ в точке:
а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = 1$; г) $x_0 = 2$.

526. Используя результат задачи 524, найдите производную функции:
а) $y = 5x^3 - 7$; б) $y = -x^3 + 5$; в) $y = 1 - 6x^3$.

527. Докажите, что производная заданной функции принимает неотрицательные значение при всех допустимых значениях аргумента:
а) $y = 3x - 7$; б) $y = x^3 + 1$; в) $y = \sqrt{x}$.

528. Найдите производную функции в точке $x_0 = 5$:
а) $y = (x + 2)(x - 2)$; б) $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$;
в) $y = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$; г) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

529. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = -\dfrac{6}{x}$ в точке: а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = 3$; г) $x_0 = 6$.

530. Для данной функции $y = 2x^2 + 4x$:
а) пользуясь определением, найдите производную;

б) напишите уравнения касательных, проведённых к графику функции в точках его пересечения с осью Ox;

в) найдите, в каких точках касательная к графику функции образует с положительным направлением оси Ox угол $45^\circ, 135^\circ$;

г) найдите, в какой точке касательная к графику функции параллельна прямой $2x + y - 6 = 0$;

д) найдите, в какой точке графика функции можно провести горизонтальную касательную. Напишите уравнение этой касательной.

531. Касательная к графику функции $y = x^2$ проходит через точку $A(4, 7)$. Найдите координаты точки касания.

Упражнения для повторения

532. Решите уравнение:

а) $x^3 - x^2 - 6x = 0$; б) $5x^4 - 3x^2 - 2 = 0$.

533. Упростите выражение:

а) $(1 - \operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x$; б) $(\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x)\sin 2x$.

534. Сравните значения выражений:

а) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ и $\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$; б) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $-\frac{3}{\sqrt{2}}$.

§ 14. ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Вы уже умеете вычислять производные некоторых элементарных функций, пользуясь формулами: $a' = 0$; $x' = 1$; $(ax + b)' = a$; $(x^2)' = 2x$; $(x^3)' = 3x^2$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

В этом параграфе будут рассмотрены теоремы, которые помогут находить производные сложных функций. Для упрощения записей вместо $u(x)$, $u'(x)$, $v(x)$, ... будем писать u, u', v, ...

Теорема (*о производной суммы*). **Если функции u и v дифференцируемы в точке x, то в этой точке $(u + v)' = u' + v'$.**

Доказательство. Найдём приращение $\Delta(u + v)$ суммы данных функций на промежутке $[x; x + \Delta x]$:

$$\Delta(u + v) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x) =$$
$$= (u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$ и $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$. Следовательно, $(u+v)' = u' + v'$.

Аналогично можно доказать, что $(u-v)' = u' - v'$.

Теорема верна также для трёх и более функций. Например, $(u+v-w)' = ((u+v)-w)' = (u+v)' - w' = u' + v' - w'$.

Теорема (*о производной произведения*). **Если функции u и v дифференцируемы в точке x, то**

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Доказательство. Найдём приращение $\Delta(uv)$ произведения данных функций на промежутке $[x; x+\Delta x]$, учитывая, что $u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$ и $v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$:

$$\Delta(uv) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) =$$

$$= (u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v) - u(x)\cdot v(x) = \Delta u \cdot v(x) + u(x)\cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u \cdot v(x)}{\Delta x} + \frac{u(x)\cdot \Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, $\frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} \to 0$, так как $\Delta v \to 0$.

Следовательно,

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной.* Ведь если $u = C$, где C — постоянный множитель, то $u' = 0$ и по теореме о производной произведения $(Cv)' = C'v + Cv' = Cv'$, т. е.

$$(Cv)' = Cv'.$$

Теорема (*о производной частного*). **Если u и v — функции от x, дифференцируемы в точке x, причём в этой точке $v \neq 0$, то**

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доказательство теоремы можно провести аналогично двум предыдущим. А саму формулу производной частного можно вывести проще.

Пусть $\frac{u}{v} = w$. Тогда $u = vw$ и по теореме о производной произведения $u' = v'w + vw'$. Выразим отсюда w':

$$w' = \frac{u' - v'w}{v} = \frac{u' - v' \cdot \frac{u}{v}}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Итак,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Теорема (*о производной степени*). **Если n — число натуральное, то**

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Доказательство. Докажем формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in N$ методом математической индукции.

1. Проверим истинность равенства при $n = 1$: $x' = 1$ (равенство правильное).

2. Предположим, что данное равенство выполняется при $n = k$, $k > 1$, $k \in N$, то есть равенство $(x^k)' = kx^{k-1}$ — истинно.

3. Докажем истинность равенства при $n = k + 1$, т. е. докажем равенство $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$.

Рассмотрим левую часть и применим к ней теорему о производной произведения $(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)' = x^k + x \cdot kx^{k-1} = x^k + k \cdot x^k = (k + 1)\, x^k$.

Следовательно, $(x^{k+1})' = (k + 1)\, x^k$.

4. По принципу математической индукции данное равенство справедливо для произвольного натурального числа n.

Позже будет показано, что эта формула верна не только для натуральных значений n, но и для любых действительных.

Примеры.

1. Если $y = x^8$, то $y' = 8x^7$.

2. Если $y = 5x^4$, то $y' = 5 \cdot (x^4)' = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3$.

3. Если $y = 2x^5 + 3x - 7$, то по теореме о производной суммы $y' = (2x^5)' + (3x)' - 7' = 10x^4 + 3$.

4. Если $y = \frac{3x^2}{x-2}$, то по теореме о производной дроби

$$y' = \frac{(3x^2)'(x-2) - 3x^2(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{6x(x-2) - 3x^2}{(x-2)^2} = \frac{3x^2 - 12x}{(x-2)^2}.$$

Из доказанных теорем следует, что *каждая функция $y = f(x)$, где $f(x)$ — многочлен, дифференцируема на всем множестве $\boldsymbol{R}$. Поэтому каждый график такой функции — линия без разры-*

вов и изломов. Если бы график функции в какой-то точке имел разрыв или перелом, то в этой точке функция не имела бы производной, то есть не была бы дифференцируемой. Дробно-рациональная функция от x дифференцируема в каждой точке x её области определения.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Сформулируйте и докажите теорему о производной суммы двух функций.
2. Как находят производную произведения двух функций?
3. Как находят производную частного?
4. Чему равна производная степени с натуральным показателем?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите производную функции $f(x) = 3x^5(1 - x^2)$.

Решение. *Способ 1.* Воспользуемся теоремой о производной произведения:

$$f'(x) = (3x^5(1 - x^2))' = (3x^5)' \cdot (1 - x^2) + 3x^5 \cdot (1 - x^2)' =$$
$$= 15x^4(1 - x^2) + 3x^5(-2x) = 15x^4 - 15x^6 - 6x^6 = 15x^4 - 21x^6.$$

Способ 2. Сначала раскроем скобки, а затем применим теорему о производной суммы.

$$f'(x) = (3x^5(1 - x^2))' = (3x^5 - 3x^7)' = 15x^4 - 21x^6.$$

2. Вычислите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = 4$, если: а) $f(x) = \dfrac{x+12}{3x}$; б) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

Решение. а) $f'(x) = \left(\dfrac{x+12}{3x}\right)' = \dfrac{(x+12)' \cdot 3x - (x+12)(3x)'}{9x^2} =$

$$= \frac{1 \cdot 3x - (x+12) \cdot 3}{9x^2} = \frac{3x - 3x - 36}{9x^2} = -\frac{4}{x^2}; \quad f'(4) = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4};$$

б) $f'(x) = (x^2 + \sqrt{x})' = (x^2)' + (\sqrt{x})' = 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

$$f'(4) = 8 + \frac{1}{4} = 8\frac{1}{4}.$$

3. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = x^4 + x^2$ в точке $x_0 = -2$.

Решение. Уравнение касательной имеет вид:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Найдём $f(-2)$ и $f'(-2)$.

$f(-2)= (-2)^4 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20$;

$f'(x) = (x^4 + x^2)' = 4x^3 + 2x$; $f'(-2) = 4(-2)^3 + 2(-2) = -36$.

Следовательно, $y = -36(x + 2) + 20$, или $y = -36x - 52$.

Выполните устно

Найдите производную функции (535—536).

535. а) $y = x^{10}$; б) $y = x^{17}$; в) $y = -5x^{20}$; г) $y = 0{,}1x^{10}$.

536. а) $y = x^5 - 7x$; б) $y = 1 - x^7$; в) $y = x^4 + x^2$; г) $y = x^3 + 5x$.

Вычислите значение производной в точке $x_0 = 1$ (537—538).

537. а) $y = \frac{1}{2}x^{10} + 3$; б) $y = \frac{1}{3}x^6 + 2$; в) $y = \frac{1}{6}x^2 - 7$.

538. а) $y = 2\sqrt{x}$; б) $y = 2 + \sqrt{x}$; в) $y = 2x - \sqrt{x}$.

Уровень А

Найдите производную функции (539—545).

539. а) $y = x^6$; б) $y = -x^3$; в) $y = x^{10}$; г) $y = -x$;
д) $y = 3x^2$; е) $y = 2x^7$; ё) $y = -7x^8$; ж) $y = 0{,}1x$.

540. а) $y = x^2 + x^3$; б) $y = x^7 - x^3$; в) $y = 4x^5 - 2$; г) $y = -5x^3 + 4$.

541. а) $y = 3x^2 - 5x + 7$; б) $y = 2 - 3x - 8x^2$;
в) $y = x^4 + 3x^3 - 5x + 4$; г) $y = 5 - 2x + 7x^2 - 3x^3$.

542. а) $y = x\sqrt{x}$; б) $y = (5 + x^2)\sqrt{x}$; в) $y = x^5(1 - \sqrt{x})$.

543. а) $y = \frac{1}{x}(2x + 1)$; б) $y = \frac{1}{x}(x^6 - 5)$; в) $y = (1 - x^{20})\frac{1}{x}$.

544. а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = \frac{x-3}{x}$; в) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$.

545. а) $y = \frac{2x+1}{5x-3}$; б) $y = \frac{x^2}{5-x}$; в) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$.

Вычислите значение производной в данных точках (546—548).

546. $f(x) = x^2 - 5x$, $x_0 = 1$; $x_0 = 0$; $x_0 = -2$.

547. $f(x) = 3x^4 + 2x - 10$, $x_0 = -2$; $x_0 = 0$; $x_0 = \sqrt{2}$.

548. $f(x) = -8x^{-1} + 3$, $x_0 = -2$; $x_0 = 1$; $x_0 = \pi$.

Уровень Б

Определите двумя способами производную функции (549—550).

549. а) $y = x^2(x^3 - 5)$; б) $y = x^3(3x^2 - 1)$; в) $y = (x - 2)(x + 3)$.

550. а) $y = 3x^2(5 - x^3)$; б) $y = -7x(x^2 - 4)$; в) $y = 5(x + 3)^2$.

Напишите уравнение касательной к графику данной функции в его точке с абсциссой x_0 (551—552).

551. а) $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$; $x_0 = -2$; б) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$; $x_0 = 4$.

552. а) $y = 3x^4 + 2x$, $x_0 = -2$; $x_0 = 0$; б) $y = x^{-2}$, $x_0 = -1$; $x_0 = 1$.

Найдите производную функции (553—557).

553. а) $y = \frac{2}{x} + 3x$; б) $y = 5 - \frac{3}{x^2}$; в) $\sqrt{x} + \frac{2}{x}$;

г) $y = \frac{2(x-5)}{3x} + \sqrt{x}$; д) $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x - \frac{3}{x}\right)$.

554. а) $y = (1 - x + x^3)(5\sqrt{x} + x)$; б) $y = (5 - \sqrt{x})(x^2 + 4\sqrt{x})$.

555. а) $y = \left(\frac{1}{x} - x^{20}\right)\left(1 - 2\sqrt{x}\right)$; б) $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\left(5x^6 - \frac{1}{x}\right)$.

556. а) $y = \frac{x^2 + 3x - 7}{2x + 1}$; б) $y = \frac{5x^4 - 1}{x^3 - x + 4}$; в) $y = \frac{5 - 0{,}1x^{10}}{x^{10} - x + 5}$.

557. а) $y = \frac{\sqrt{x} + 2x}{1 - \sqrt{x}}$; б) $y = \frac{5\sqrt{x} - 1}{x^3 - x + 2}$; в) $y = \frac{x^7 + 3x - 7}{2\sqrt{x} + x^3}$.

558. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = x - 12x^3$; б) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 4$;

в) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$; г) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 6x$.

559. Решите неравенство $f'(x) < 0$, если:

а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; б) $f(x) = 12x - x^3$;

в) $f(x) = \frac{4}{5x - 2}$; г) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$.

Уровень B

560. Найдите функцию $y = f(x)$, если её производная $f'(x) = 2x + 3$. Сколько решений имеет задача?

561. Напишите уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{x}{4}$, $x_0 = 5$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\sqrt{x} - 5\right)$, $x_0 = 25$;

в) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{3 + x}$, $x_0 = 7$; г) $f(x) = \frac{1}{3}\left(0{,}5x^2 - \sqrt{x}\right)^2$, $x_0 = 4$.

562. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси Ox:

а) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$; б) $f(x) = x^3 - 3x + 1$;

в) $f(x) = x^2(2x - 9)$; г) $f(x) = 2x(3 - 8x^3)$.

563. Найдите координаты точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 4x + 3$:

а) $f(x) = 0{,}25x^4 + x^3 + 1$; б) $f(x) = 4\sqrt{x} - x + 0{,}5x^2$.

564. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ перпендикулярна прямой $y = 11x + 3$:

а) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{3+x} - x$; б) $f(x) = \dfrac{x}{11} - 2\sqrt{x} + \sqrt{3}$.

565. Вычислите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $y = (2x - 1)(4x^2 - 4x + 1)$, в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

566. Напишите уравнения касательных к графику функции $y = x^2 - 5x + 7$, которые вместе с осями координат образуют равнобедренный треугольник. Найдите площадь этого треугольника.

567. Напишите уравнения касательных, проведённых к графику функции $y = x^2 + 2x - 1$ из точки $A(-1; -3)$. Выполните рисунок.

568. С точки $A(2; 6)$ к кривой $y = -x^2 + 2x + 2$ проведены касательные. Найдите расстояние между точками касания.

569. Составьте уравнения общих касательных к графикам функций $y = -x^2 + 2x - 2$ и $y = x^2 + 2x$.

570. Найдите точку пересечения касательных к графику функции $y = x^2 - |5x - 1|$, проведённых через точки с абсциссами:

а) $x_0 = 1$, $x_0 = 2$; б) $x_0 = -2$, $x_0 = 2$; в) $x_0 = -1$, $x_0 = -2$.

571. При каких значениях параметра a касательная к графику функции $y = x^3 + ax^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$ проходит через точку:

а) $A(0; 5)$; б) $A(3; 4)$?

Упражнения для повторения

572. Постройте график функции:

а) $y = \sin x$; б) $y = 2\sin x$; в) $y = 2\sin x - 1$.

573. Упростите выражение:

а) $\cos 3x - \sin 4x - \cos 5x$; б) $\sin 10x - \sin 6x - 2\sin 4x$.

574. Решите уравнение:

а) $x - \sqrt{x+8} = 4$; б) $x^2 - 3x + 1 = 2\sqrt{x^2 - 3x}$.

§ 15. ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим производные тригонометрических функций. Правильны следующие формулы:

$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$;

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Для доказательства двух первых формул вспомним первый замечательный предел (см. с. 106), а именно: когда $x \to 0$, то $\sin x$ все меньше отличается от x, т. е. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Теорема (*о производной синуса*). **Для каждого действительного x**

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Доказательство. Найдём приращение функции $\sin x$ на промежутке $[x; x + \Delta x]$:

$$\Delta \sin x = \sin (x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Поэтому $\dfrac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \dfrac{2 \sin \dfrac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \dfrac{\sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$.

Если $\Delta x \to 0$, то и $\dfrac{\Delta x}{2} \to 0$. В этом случае $\dfrac{\sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \to 1$. Известно также, что функция $\cos x$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Поэтому если $\dfrac{\Delta x}{2} \to 0$, то $\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$.

Следовательно, для произвольного x

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

То есть, всегда $(\sin x)' = \cos x$.

Т е о р е м а (*о производной косинуса*). **Для каждого действительного x**

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\Delta\cos x = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\frac{\Delta\cos x}{\Delta x} = -\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то и $\frac{\Delta x}{2} \to 0$, а $\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \to \sin x$, поскольку функция $\sin x$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Следовательно, при каждом действительном x

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right) = -\sin x\cdot 1 = -\sin x.$$

То есть $(\cos x)' = -\sin x$.

Формулы производных тангенса и котангенса можно доказать, используя теорему о производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Итак, в каждой точке x области определения функций:

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Сформулируйте и докажите теорему о производной синуса.
2. Сформулируйте и докажите теорему о производной косинуса.
3. Чему равна производная тангенса? А котангенса?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите производную функции $f(x) = \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} x$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой о производной произведения:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} x\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt{x} \cdot (\operatorname{tg} x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \cos x + 2x}{2\sqrt{x}\cos^2 x} = \frac{0{,}25 \sin 2x + x}{\sqrt{x}\cos^2 x}.$$

2. Вычислите значение производной функции $y = 3\sin x + 5\cos x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой о производной суммы:
$y' = (3 \sin x + 5 \cos x)' = (3 \sin x)' + (5 \cos x)' = 3 \cos x - 5 \sin x.$

Если $x_0 = \frac{\pi}{4}$, то $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\frac{\pi}{4} - 5\sin\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$.

О т в е т. $-\sqrt{2}$.

3. В какой точке касательная, проведённая к графику функции $f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x + 5$, $x \in [0; \pi]$, параллельна прямой $y = 2x - 1$?

Р е ш е н и е. В искомой точке угловой коэффициент k касательной равен 2, ибо параллельные прямые имеют равные угловые коэффициенты.

Кроме этого, угловой коэффициент k касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, определяется формулой $k = f'(x_0)$. Можем составить уравнение $f'(x_0) = 2$.

Найдём $f'(x)$: $f'(x) = (\sqrt{3} \sin x - \cos x + 5)' = \sqrt{3} \cos x + \sin x$.

Абсциссу искомой точки найдём, решив уравнение $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2$. Имеем: $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1$, или $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$, отсюда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in N$.

Промежутку $[0;\pi]$ принадлежит только одна такая точка: $x_0=\frac{\pi}{6}$.

Тогда $y_0=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}+5=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+5=5$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6};5\right)$.

Выполните устно

Найдите производную функции (575—576).

575. а) $y=3\sin x$; б) $y=2\operatorname{tg}x$; в) $y=-5\cos x$.

576. а) $y=2+\cos x$; б) $y=1+\operatorname{ctg}x$; в) $y=\sqrt{3}-\sin x$.

577. Найдите значение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x)=\sin x$, $x_0=0$; б) $f(x)=\cos x$, $x_0=2\pi$; в) $f(x)=\operatorname{tg}x$, $x_0=\pi$.

578. Верно ли, что производная функции $y=\operatorname{ctg}x$ принимает только отрицательные значения? А функции $y=\cos x$?

Уровень А

Найдите производную функции (579—586).

579. а) $y=2\sin x+1$; б) $y=3\cos x+2$; в) $y=4\operatorname{tg}x-3$;
г) $y=\sin x+2x$; д) $y=-\cos x+3x$; е) $y=\operatorname{tg}x+4x$.

580. а) $y=x^2+\cos x$; б) $y=3x^4-\sin x$; в) $y=2x^5+\operatorname{tg}x$;
г) $y=\sqrt{x}+\operatorname{ctg}x$; д) $y=2\sqrt{x}-\sin x$; е) $y=-\sqrt{x}+\cos x$.

581. а) $y=2\sin x+3\cos x$; б) $y=4\operatorname{tg}x-3\cos x$;
в) $y=5\sin x-\operatorname{ctg}x$; г) $y=11\cos x-2\operatorname{tg}x$.

582. а) $y=\frac{1}{3}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$; б) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x-\frac{2}{3}\cos x$;
в) $y=0{,}5\cos x+\operatorname{tg}x$; г) $y=-4\sin x+\operatorname{ctg}x$.

583. а) $y=x\sin x$; б) $y=x\operatorname{tg}x$; в) $y=\sqrt{x}\cos x$.

584. а) $y=x^3\sin x$; б) $y=x^2\operatorname{ctg}x$; в) $y=x^5\cos x$.

585. а) $y=\frac{2x}{\sin x}$; б) $y=\frac{\cos x}{x-5}$; в) $y=\frac{x^2}{\cos x}$.

586. а) $y=\frac{\cos x}{x^2+1}$; б) $y=\frac{x^2-1}{\sin x}$; в) $y=\frac{1+\sin x}{\sqrt{x}}$.

Уровень Б

Найдите двумя способами производную функции (587—588).

587. а) $y=(1-x)\sin x$; б) $y=(x+3)\cos x$; в) $y=x(2+\operatorname{ctg} x)$.

588. а) $y=(x^2+1)\cos x$; б) $y=(\sqrt{x}-1)\sin x$; в) $y=\sqrt{x}\,(\operatorname{tg} x-3)$.

Вычислите значение производной функции в данной точке (589—590).

589. а) $y=2\sin x-13\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$; б) $y=4\cos x+x\sqrt{2}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

590. а) $y=\frac{\sin x}{x}$, $x_0=\frac{\pi}{2}$; б) $y=\frac{\cos x}{x}$, $x_0=\pi$.

591. Вычислите $f'(0)$, $f'(\pi)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(3)$, если $f(x)=x\cos x$.

Напишите уравнение касательной к графику данной функции в точке с абсциссой x_0 (592—593).

592. а) $y=2+\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; б) $y=4\operatorname{tg} x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

593. а) $y=\sin x+\cos x$, $x_0=\pi$; б) $y=\operatorname{tg} x-\cos x$, $x_0=\pi$.

594. В каких точках касательная, проведённая к графику функции $y=2\sin x$, параллельна прямой:

а) $y=2x-5$; б) $y=x+3$?

595. Найдите производную функции:

а) $y=\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x$; б) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$;

в) $y=\cos 3x\cos 2x+\sin 3x\sin 2x$; г) $y=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$.

Вычислите (596—598).

596. $f'(0{,}5\pi)$, если: а) $f(x)=x^2+x+\sin x$; б) $f(x)=x+x^2\sin x$.

597. $f'(\pi)$, если: а) $f(x)=1+x+\cos x$; б) $f(x)=x(1+\cos x)$.

598. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, если: а) $f(x)=x\cos x+\frac{x^2}{\pi}+\frac{x^2}{4}$; б) $f(x)=\frac{x}{\cos x}-\frac{x^2}{3}$.

Найдите производную функции (599—600).

599. а) $y=\sin x\cos x$; б) $y=\sin 2x$.

600. а) $y=\cos^2 x$; б) $y=\cos 2x$.

Найдите производную функции и вычислите ее значение в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$ (601—604).

601. а) $y = 5\operatorname{tg} x(\sin x + 2)$; б) $y = (3x + \sqrt{x})(\cos x - 5)$;

в) $y = \sqrt{x}\,(1 - \operatorname{ctg} x)$; г) $y = (4 - \operatorname{tg} x)(\cos x + 7)$.

602. а) $y = (5 + 2\cos x)(1 - \operatorname{tg} x)$; б) $y = (4x - \pi)(\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x)$;

в) $y = (\sin x + \operatorname{ctg} x)\left(\frac{1}{x} + 3\right)$; г) $y = (\operatorname{tg} x - 2\sin x)\left(\frac{1}{x} - \cos x\right)$.

603. а) $y = \frac{1 + \sin x}{2\operatorname{tg} x}$; б) $y = \frac{5\cos x - 1}{5 + \operatorname{tg} x}$; в) $y = \frac{2x - \operatorname{tg} x}{\cos x}$.

604. а) $y = \frac{\cos x + 2x}{\sin x}$; б) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + 2\cos x}$; в) $y = \frac{3x}{2\operatorname{tg} x + x}$.

Уровень В

605. Решите уравнение $f'(x) = g'(x)$, если:

а) $f(x) = \sin x \cos x$, $g(x) = 0{,}5x + 5$;

б) $f(x) = x\cos x$, $g(x) = \sin x$.

606. Решите неравенство $f'(x) > g'(x)$, если:

а) $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x - \cos x$;

б) $f(x) = \sin x \cos x$, $g(x) = 1 - 0{,}5x$.

607. При каких значениях x выполняется равенство $y' \cdot y + y^2 = 0$, если:

а) $y = 2\sin x$; б) $y = 3\cos x$; в) $y = 4\operatorname{tg} x$?

608. При каких значениях x выполняется равенство $(y')^2 + y^2 = 1$, если:

а) $y = 1 - \sin x$; б) $y = 1 - \cos x$; в) $y = \sin x + \cos x$?

609. Напишите уравнение такой касательной к графику функции $y = f(x)$, $x \in (0, \pi)$, которая образует с осью абсцисс угол 45°, если:

а) $f(x) = x + 2\sin x$, б) $f(x) = 2x + \sin x \cos x$.

610. К графику функции $f(x) = \sin x \cos x$ проведены касательные в точках с координатами $(a; f(a))$, а к графику функции $g(x) = 2 + \sin x$ — в точках $(a; g(a))$. Найдите все такие пары точек, касательные в которых, проведённые к графикам функций $f(x)$ і $g(x)$, параллельны между собой. Запишите уравнение одной из пар таких касательных.

611. Какой формулой можно задать функцию $y = f(x)$, если:

а) $y' = 2x - \sin x$; б) $y' = x^2 + 3\cos x$; в) $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{\sin^2 x}$?

612. Найдите функцию $y = f(x)$, если:

а) $f'(x) = 2\cos x$ и $f(\pi) = 3$; б) $f'(x) = \sin x$ и $f(\pi) = 2$;

в) $f'(x) = \frac{1}{5\sin^2 x}$ и $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}8$; г) $f'(x) = 4 - \frac{1}{\cos^2 x}$ и $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$.

613. Найдите угол между касательными, проведёнными к графикам функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ в точке $x_0 = 0$.

Упражнения для повторения

614. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x+1}{x^2 - 3x + 4}$; б) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2 - 3x - 4}$.

615. При каких значениях x данная функция принимает наименьшее значение:

а) $y = x^2 - 6x + 9$; б) $y = x^2 + 4x + 7$; в) $y = 4x^2 - 12x - 3$?

616. Расходы на изготовление изделия составляют 1250 грн, а его цена — 1750 грн. Вычислите наценку на товар в процентах.

§ 16. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

До сих пор рассматривались производные функций, аргументами которых была переменная x, например $y = x^n$, $y = \sin x$. А как находить производные функций $y = (2x + 1)^{10}$, $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$? Каждую из них можно рассмотреть как функцию $y = f(u)$, где $u = h(x)$, т. е. $y = f(h(x))$. Такую функцию называют *сложной*, а функции $u = h(x)$ и $f(u)$ — соответственно внутренней и внешней функциями.

Рассматривая в функции $y = f(u)$ переменную u как аргумент, можно найти и производную этой функции по u. Её мы будем обозначать знаком y'_u. Производные функций по x по-прежнему будем обозначать символами y', u'.

Теорема (*о производной сложной функции*). **Пусть дана функция $y = f(u)$, где $u = h(x)$. Если в какой-то точке x существует производная u' и в соответствующей точке u существует производная y'_u, то существует также производная y', причём $y' = y'_u \cdot u'$.**

Строгое доказательство этой теоремы сложное, поэтому ограничимся только его схемой. Производная y' равна пределу отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда $\Delta x \to 0$. Считая, что $\Delta u \neq 0$, умножим числитель и знаменатель этого отношения на Δu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} . \qquad (*)$$

Если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta u \to 0$, поскольку речь идет о функции $u = h(x)$, дифференцируемой в точке x. Поэтому если $\Delta x \to 0$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y', \ \frac{\Delta y}{\Delta u} \to y'_u, \ \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$$

и из равенства (*) следует равенство $y' = y'_u \cdot u'$.

До сих пор речь шла о производной y' в некоторой фиксированной точке x. Если же данная сложная функция $y = f(h(x))$ дифференцируема в каждой точке x некоторого промежутка, то равенство $y' = y'_u \cdot u'$ выполняется на всём промежутке. Итак, пользуясь этим равенством, можно находить производную данной функции и как функцию, заданную на этом промежутке.

Пример. Найдём производную функции $y = (2x + 1)^{10}$. Это функция $y = u^{10}$, где $u = 2x + 1$. Эти функции дифференцируемы на $\boldsymbol{R}$, $y'_u = 10u^9$, $u' = 2$.

Итак, $y' = 10u^9 \cdot 2 = 20u^9 = 20\,(2x + 1)^9$.

Не обязательно, решая такие упражнения, вводить переменную u. Её можно только представлять и сразу писать, например:

$$(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3 \cos 3x;$$

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

Производной данной функции $y = f(x)$ есть некоторая функция от того же аргумента x: $y' = \varphi(x)$. Её также можно дифференцировать: находить производную производной. В этом случае говорят о нахождении *производной второго порядка*. Производную от производной второго порядка называют производной третьего порядка.

Для примера рассмотрим функцию $y = x^4 + 2x^2 + 1$. Найдём производную этой функции, производные образованных функций и запишем соответствующие названия:

$y' = (x^4 + 2x^2 + 1)' = 4x^3 + 4x = y'$ — производная первого порядка;

$(y')' = (4x^3 + 4x)' = 12x^2 + 4 = y''$ — производная второго порядка;

$(y'')' = (12x^2 + 4)' = 24x = y'''$ — производная третьего порядка;

$(y''')' = (24x)' = 24 = y^{(4)}$ — производная четвёртого порядка;

$(y^{(4)})' = (24)' = 0 = y^{(5)}$ — производная пятого порядка.

Понятно, что все производные следующих порядков $y^{(n)}$ $(n > 5)$ функции $y = x^4 + 2x^2 + 1$ также равны нулю.

Производные второго и высших порядков используются для исследования функций различной природы. Об этом вы узнаете в следующих параграфах.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Какую функцию называют сложной? Приведите примеры.
2. Как находят производную сложной функции? Приведите примеры.
3. Как обозначают производную второго порядка? А третьего?
4. Как найти производную второго порядка? А третьего?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите $f(g(x))$, если:

а) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin x$; б) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 + 1$.

Р е ш е н и е. а) По условию $f(x) = \sqrt{x}$ — внешняя функция, а $g(x) = \sin x$ — внутренняя. Следовательно, аргументом внешней функции должна стать функция $g(x) = \sin x$, то есть вместо x в выражении $\sqrt{x}$ следует записать $\sin x$. Имеем: $f(g(x)) = \sqrt{\sin x}$;

б) по условию $f(x) = \ln x$ — внешняя функция, а $g(x) = x^2 + 1$ — внутренняя. Следовательно, аргументом функции $f(x) = \ln x$ должна стать функция $g(x) = x^2 + 1$, т. е. вместо x в выражении $\ln x$ следует записать $x^2 + 1$. Имеем: $f(g(x)) = \ln(x^2 + 1)$.

2. Выведите формулу для вычисления производной функции $y = \sqrt{u}$.

Р е ш е н и е. Из данного равенства получаем $u = y^2$, $u' = 2y \cdot y'$, отсюда $y' = \dfrac{u'}{2y} = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

В частности, если $u = x$, то $u' = 1$. Следовательно, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. Найдите значение производной функции $y = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ в точке $x_0 = 1$.

Р е ш е н и е.

$$y' = \left(\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}\right)' = \frac{\left(x^3 + x^2 + x + 1\right)'}{2\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}} = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}}.$$

Если $x_0 = 1$, то $y'(x_0) = y'(1) = 1{,}5$.

4. Найдите y'', если $y = \cos(x^2 - 1)$.

Решение.

$y' = (\cos(x^2 - 1))' = -\sin(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1)' = -\sin(x^2 - 1) \cdot 2x.$

$y'' = (-\sin(x^2 - 1) \cdot 2x)' = -2(x \cdot \sin(x^2 - 1))' =$

$= -2(\sin(x^2 - 1) + x \cdot \cos(x^2 - 1) \cdot 2x) = -2\sin(x^2 - 1) - 4x^2 \cdot \cos(x^2 - 1).$

Выполните устно

617. Найдите $f(g(x))$, если:

а) $f(x) = x^3$ и $g(x) = \operatorname{tg} x$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x$ и $g(x) = x^3$;

в) $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = \operatorname{ctg} x$; г) $f(x) = \operatorname{ctg} x$ и $g(x) = 2x - 1$.

618. Найдите $f(x)$ и $g(x)$, если:

а) $f(g(x)) = \sin(x^2 - 5)$; б) $f(g(x)) = \sqrt{1 - x^3}$;

в) $f(g(x)) = (\operatorname{tg} x + 1)^5$.

Найдите производную функции (**619—620**).

619. а) $y = \sin 3x$; б) $y = \cos 2{,}5x$; в) $y = \sin x^2$; г) $y = \operatorname{tg}(x^2 - 1)$.

620. а) $y = \sqrt{2x}$; б) $y = \sqrt{2x + 3}$; в) $y = \sqrt{2 - 3x}$; г) $y = \sqrt{\sin x}$.

Найдите вторую производную функции (**621—622**).

621. а) $y = 3x$; б) $y = 2{,}5x^2$; в) $y = 5x + 7$; г) $y = -x^3$.

622. а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \sin 5x$; г) $y = \cos 3x$.

Уровень А

Найдите $f(g(x))$, если известны функции $f(x)$ и $g(x)$ (**623—624**).

623. а) $f(x) = x^2$ и $g(x) = 2x + 7$; б) $f(x) = 2x + 7$ и $g(x) = x^2$;

в) $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = 3 - 4x$; г) $f(x) = 3 - 4x$ и $g(x) = \sqrt{x}$.

624. а) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ и $g(x) = x^2 + 3$; б) $f(x) = x^2 + 3$ и $g(x) = \dfrac{2}{x}$;

в) $f(x) = \sin x$ и $g(x) = 3x + 4$; г) $f(x) = 3x + 4$ и $g(x) = \sin x$.

По известной функции $y = f(g(x))$ найдите $f(x)$ и $g(x)$ (**625—626**).

625. а) $y = (3x + 10)^3$; б) $y = (x^2 + 5x - 1)^4$; в) $y = \sqrt{x^2 - 3x}$.

626. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{5 - 2x}}$; б) $y = \dfrac{1}{2x + 4}$; в) $y = \dfrac{10}{(3x - x^2)^3}$.

Найдите производную функции (**627—632**).

627. а) $y = (x + 3)^{20}$; б) $y = (2 - x)^7$; в) $y = (1 - x^3)^5$;

г) $y = 5(1 - 2x)^7$; д) $y = (3 + x^2)^9$; е) $y = (2x + 1)^5$.

628. а) $y = \sin 4x$; б) $y = \operatorname{ctg} 2x$; в) $y = \operatorname{tg} 3x$;

г) $y = \operatorname{tg} \dfrac{3x}{4}$; д) $y = \sin \dfrac{x}{3}$; е) $y = \cos \dfrac{2x}{3}$.

629. а) $y = 2 + \sin 3x$; б) $y = 1 + \operatorname{tg} 3x$;
в) $y = \sin x + \sin 2x$; г) $y = \cos x - \cos 2x$.

630. а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$;

в) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = \operatorname{tg}(3x + 1)$.

631. а) $y = x\sin 2x$; б) $y = x\cos 3x$; в) $y = x\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $y = x\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

632. а) $y = \sqrt{x^2 - 5}$; б) $y = \sqrt{x+3} - \sqrt{3x}$;

в) $y = \sqrt{(x-1)(x+2)}$; г) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$:

633. Вычислите значение производной функции в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$;

в) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; г) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

634. Вычислите значение производной функции в точке x_0.

а) $y = (3x - 4)^7$, $x_0 = 2$; б) $y = \sqrt{25 - 9x}$, $x_0 = 1$;

в) $y = (4 - 5x)^8$, $x_0 = 1$; г) $y = \sqrt{7x+1}$, $x_0 = 5$.

Уровень Б

Запишите уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 **(635—636)**.

635. а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; б) $y = \sqrt{2x+3}$, $x_0 = 3$.

636. а) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; б) $y = \sqrt{5x-1}$, $x_0 = 2$.

Упростите формулу, которая задаёт функцию, и найдите её производную **(637—639)**.

637. а) $y = 2\cos^2 x - 1$; б) $y = 2\sin^2 x \cos^2 x$;
в) $y = 1 - 2\sin^2 3x$; г) $y = \sin^2 8x \cos^2 8x$.

638. а) $y = \sin 8x \cos 5x - \cos 8x \sin 5x$;

б) $y = \cos 4x \cos 6x + \sin 4x \sin 6x$.

639. а) $y = \sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x$;

б) $y = \cos\frac{x}{3}\cos\frac{5x}{6} - \sin\frac{x}{3}\sin\frac{5x}{6}$.

Найдите $f''(x)$ **(640—643).**

640. а) $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$; б) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 5$.

641. а) $f(x) = x^5 - 7x^3 + 5x$; б) $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2$.

642. а) $f(x) = \sin 5x + x^2$; б) $f(x) = \cos 2x + x$.

643. а) $f(x) = 1 - \cos(2 - x)$; б) $f(x) = 0{,}5x - \sin(5 + 3x)$.

Найдите производную функции **(644—646).**

644. а) $y = \sin x \cos 2x$; б) $y = \cos x \sin 3x$;

в) $y = \sin x \cos\frac{x}{2}$; г) $y = \cos x \cos\frac{x}{3}$.

645. а) $y = \sin^4 x$; б) $y = 5\operatorname{tg}^3 x$; в) $y = \sqrt{\sin x}$; г) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

646. а) $y = \frac{\cos 2x}{x-1}$; б) $y = \frac{\cos 2x}{1-\sin x}$.

Уровень В

647. Вычислите значение производной функции в точке $x_0 = 0$.

а) $y = (x^2 - 3x + 1)^7$; б) $y = \sqrt{(x-1)(x-4)}$;

в) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x+4}}$; г) $y = \left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)^3$.

648. Вычислите значение производной функции в точке x_0.

а) $y = (x + 2\sin x)^2$, $x_0 = \pi$; б) $y = \sqrt{\sin x \cos x}$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

в) $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{\cos x}}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; г) $y = \left(\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\right)^3$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Запишите уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 **(649—650).**

649. а) $y = \operatorname{tg} 6x$, $x_0 = \frac{\pi}{24}$; б) $y = \operatorname{ctg}^2 x - 1$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

650. а) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{3}$, $x_0 = \pi$; б) $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

651. Найдите площадь треугольника, образованного координатными осями и касательной, проведённой к графику функции $y = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

652. Найдите площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной, проведённой к графику функции $y = 2\sqrt{x^2 - 5}$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

653. Докажите, что графики функций $y = \sqrt{3x+1}$ и $y = \sqrt{5x - x^2}$ в точке пересечения имеют общую касательную. Напишите её уравнение.

654. Касательная, проведённая к графику функции $y = \frac{6x}{\sqrt{1-2x}}$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$, имеет вид $3x + by = a$. Найдите a и b.

655. Найдите вторую производную функции:

а) $y = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$.

656. Найдите производную четвёртого порядка функции:

а) $y = x \sin x$; б) $y = x\cos x$.

657. Выведите формулы для нахождения производной n-го порядка для функции:

а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = (x + 1)^{-1}$.

Упражнения для повторения

658. Постройте график функции:

а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$; б) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x + 1$.

659. Найдите период функции:

а) $y = \sin x \cos x$; б) $y = 2\operatorname{tg} 5x + 1$; в) $y = 1 - 2\sin^2 3x$.

660. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{4}{x-2} - \frac{1}{y-6} = 0, \\ \frac{3}{x+5} + \frac{2}{y-3} = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{x+3} - \frac{2}{y} = 0, \\ \frac{4}{x-1} - \frac{5}{y+1} = 1. \end{cases}$

§ 17. ПРОИЗВОДНЫЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

Докажем следующие формулы производных:

1) $(e^x)' = e^x$; 2) $(a^x)' = a^x \ln a$;

3) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; 4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

1. Пусть дана функция $y = e^x$. Зафиксируем произвольное значение x её аргумента и дадим ему приращение Δx. Тогда приращение функции

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = (e^{\Delta x} - 1)e^x.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \cdot e^x.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to 1$. Это следует из того, что угловой коэффициент касательной к графику функции $y = e^x$ в точке $A\,(0; 1)$ равен 1 (см. § 3, рис. 22. В математическом анализе доказывают следующее утверждение: если $x \to 0$, то $\frac{e^x - 1}{x} \to 1$). Если значение x зафиксировано, то когда $\Delta x \to 0$, значение e^x не меняется. Следовательно, если $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to e^x$. Это и означает, что функция $y = e^x$ дифференцируема в каждой точке $x \in \boldsymbol{R}$ и

$$(e^x)' = e^x.$$

2. Как известно, при каждом $a > 0$ выполняется равенство $a = e^{\ln a}$. Поэтому

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}.$$

По теореме о производной сложной функции

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Итак, формула 2 доказана.

3. Если $x > 0$, то $e^{\ln x} = x$ и $(e^{\ln x})' = x' = 1$.

А по теореме о производной сложной функции

$$(e^{\ln x})' = e^{\ln x} (\ln x)' = x (\ln x)'.$$

Следовательно, $1 = x (\ln x)'$, отсюда $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4. При каждом $x > 0$ по формуле перехода

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x.$$

Следовательно,

$$(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

По доказанным формулам можно находить производные любых показательных или логарифмических функций, а значит, и исследовать эти функции.

Обратите внимание! Если функция содержит логарифм сложного выражения, то прежде чем находить её производную, целесообразно это выражение прологарифмировать.

Пример. Найдите производную функции $y = \ln\left(\frac{x^2}{(x+2)(x-3)}\right)$.

Решение. $\ln\left(\frac{x^2}{(x+2)(x-3)}\right) = \ln x^2 - \ln((x+2)(x-3)) =$

$= 2\ln x - \ln(x+2) - \ln(x-3).$

$$y' = (2\ln x - \ln(x+2) - \ln(x-3))' = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3}.$$

Теперь можно вывести формулу производной степенной функции $y = x^\alpha$, где α — произвольное действительное число.

Если $x > 0$, то $x = e^{\ln x}$ и $x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Поэтому

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Итак, формула $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$, доказанная ранее только для натурального показателя степени α, верна и для любого действительного α и положительного x.

Формулу для нахождения производной логарифмической функции можно вывести иначе, используя тот факт, что функция $y = \log_a x$ обратная к функции $y = a^x$.

Выясним, как связаны между собой производные взаимно обратных функций.

Теорема. **Если функция $y = f(x)$ обратима (строго монотонная) на интервале $(a; b)$ и имеет отличную от нуля произ-**

водную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, тогда существует обратная функция $x = g(y)$, которая также имеет производную $g'(y)$, причём:

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}, \text{ или } y'_x=\frac{1}{x'_y}.$$

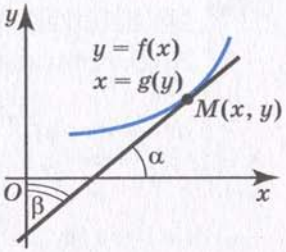


Рис. 69

Обоснуем эти формулы, используя геометрический смысл производной.

Пусть $y = f(x)$ и $x = g(y)$ — взаимно обратные функции. Тогда они задают одну и ту же кривую (*рис. 69*). Если касательная к этой кривой в точке $M(x; y)$ образует с осью Ox угол α, а с осью Oy угол β, то $f'(x) = tg\,\alpha$ и $g'(y) = \operatorname{tg}\beta$.

Поскольку $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Из этого соотношения следует, что $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$.

Строгое доказательство этой теоремы рассматривается в университетском курсе математического анализа.

Применим формулу $y'_x=\frac{1}{x'_y}$ для дифференцирования функции $y = \arcsin x$ ($x \in (-1; 1)$), обратной к функции $x = \sin y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Получим:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Производные других обратных тригонометрических функций найдите самостоятельно (см. № 695).

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Чему равна производная функции $y = e^x$?
2. Как находят производную показательной функции?
3. Чему равна производная функции $y = \ln x$?
4. Как находят производную логарифмической функции?
5. Чему равна производная функции $y = \lg x$?
6. Чему равна производная функции $y = x^\alpha$?
7. Чему равна производная функции $y = \arcsin x$?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите производную функции:

а) $y = e^{x+2}$; б) $y = e^{x+\sin x}$; в) $y = \ln x^3$.

Р е ш е н и е. а) $y' = e^{x+2}(x+2)' = e^{x+2}$;

б) $y' = e^{x+\sin x}(x+\sin x)' = (1+\cos x)e^{x+\sin x}$;

в) $y' = \frac{1}{x^3} \cdot (x^3)' = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$, или $y' = (3\ln x)' = \frac{3}{x}$.

2. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = \ln x$, если точка касания имеет ординату $y_0 = -1$.

Р е ш е н и е. Найдём абсциссу точки касания:

$\ln x = -1$, отсюда $x_0 = e^{-1}$.

Найдём производную функции $y = \ln x$ и её значение в точке $x_0 = e^{-1}$.

$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$; $y'(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e$.

Уравнение касательной запишем в виде $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$:

$y - (-1) = e(x - e^{-1})$, или $y + 1 = ex - 1$, отсюда $y = ex - 2$.

3. Найдите производную функции $y = x^{\pi} + \pi^x$.

Р е ш е н и е. Заданная функция является суммой степенной и показательной функций. Для нахождения её производной воспользуемся соответствующими формулами:

$y' = (x^{\pi} + \pi^x)' = (x^{\pi})' + (\pi^x)' = \pi x^{\pi-1} + \pi^x \ln \pi$.

Выполните устно

Найдите производную функции (**661—664**).

661. а) $y = 2e^x$; б) $y = e$; в) $y = e^{x+5}$; г) $y = -e^x$.

662. а) $y = e^{-x}$; б) $y = e^{3x}$; в) $y = e^{1-2x}$; г) $y = e^e$.

663. а) $y = 3^x$; б) $y = 4^{3x}$; в) $y = 0{,}5^{-2x}$; г) $y = x^{-2}$.

664. а) $y = 5\ln x$; б) $y = \ln 5x$; в) $y = \ln e$; г) $y = -\lg x$.

665. Может ли производная показательной функции равняться нулю? А логарифмической?

Уровень А

Найдите производную функции (**666—673**).

666. а) $y = (7e)^x$; б) $y = 3^x$; в) $y = \pi^x$.

667. а) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$; б) $y = 4^x - x$; в) $y = 0{,}5^x + 0{,}5$.

668. а) $y = 8\ln x$; б) $y = -\ln x$; в) $y = \lg x$.

669. а) $y = \log_2 x$; б) $y = \lg(x+3)$; в) $y = 3 - \lg x$.

670. а) $y = x^{2,5}$; б) $y = -x^{0,5}$; в) $y = 2x^{1,7}$; г) $y = -x^e$.

671. а) $y = x^{\pi}$; б) $y = x^{\sqrt{3}}$; в) $y = x^{-e}$; г) $y = x^{e+1}$.

672. а) $y = 3^x - 2\ln x$; б) $y = \ln(7x)$; в) $y = \log_2(4x)$;
г) $y = e\ln(x+5)$; д) $y = x\ln 5$; е) $y = 2^x + \ln 2$.

673. а) $y = e - \ln x$; б) $y = \ln(10 - 5x)$; в) $y = 1 - 3^x$;
г) $y = 3 - 4\ln(1-x)$; д) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$; е) $y = \log_3 \frac{x}{9}$.

Найдите значение производной функции в точке $x_0 = 1$ (**674—676**).

674. а) $y = e^x + x^e$; б) $y = x^2 + \ln x$; в) $y = x - \log_2 x$.

675. а) $f(x) = xe^x$; б) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$; в) $f(x) = e^x + \ln x$.

676. а) $f(x) = x\ln x$; б) $f(x) = 2^x + \ln x$; в) $f(x) = x^{-1} + \ln x$.

Уровень Б

Напишите уравнения касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (**677—678**).

677. а) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$.

678. а) $f(x) = 2\ln x$, $x_0 = e$; б) $f(x) = \log_2(x-1)$, $x_0 = 2$.

679. Найдите угол между осью Ox и касательной, проведённой к графику функции $y = e^{-x} - e^{-2x}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

Найдите производную функции (**680—684**).

680. а) $y = \sqrt{2^x}$; б) $y = 1{,}5^{\sin x}$; в) $y = 3^x : \ln 3$;
г) $y = \sqrt{x^{0,5}}$; д) $y = x^{1,7} \cdot \sqrt{x}$; е) $y = x^{\sqrt{3}}$.

681. а) $y = 3x^{\frac{2}{3}}$; б) $y = -2x^{\frac{3}{2}}$; в) $y = x \cdot x^{\frac{1}{3}}$;
г) $y = \sqrt[4]{x}$; д) $y = 2\sqrt[3]{x}$; е) $y = \sqrt[5]{x+2}$.

682. а) $y = e^{-x} + x^2 e$; б) $y = e^{\sqrt{x}}\cos 2x$; в) $y = e^x \cdot e^{\sin x}$;
г) $y = x\sqrt[3]{3x^2+1}$; д) $y = \sqrt[3]{x(1-x)^2}$; е) $y = 3 : \sqrt[3]{2x^3 - x}$.

683. а) $(e^x + 2)^4$; б) $\frac{1}{1-e^{-x}}$; в) $\sqrt{e^{2x} + 10}$;
г) $y = \ln(x^3) + (\ln x)^2$; д) $y = (\ln(x^4 + x))^3$; е) $y = \sqrt{x}\lg(2x)$.

684. а) $\frac{1}{\left(1-e^{3x}\right)^2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{1-e^{-x}}}$; в) $x\sqrt{1-2e^{-x}}$;

г) $y = (\ln(2x+1))^3$; д) $y = \dfrac{\ln(4x)}{x}$; е) $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln x}$.

Уровень В

Продифференцируйте функцию рациональным способом (685—687).

685. а) $f(x) = \ln((3x-4)^3)$; б) $f(x) = \ln(x(x^2+1))$.

686. а) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+2x}{x-5}\right)$; б) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^3}{(2-3x)^2}\right)$.

687. а) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{x(x+2)}\right)$; б) $f(x) = \ln\left(\dfrac{(x+1)(2x-1)}{3x^2}\right)$.

688. Найдите производную функции:

а) $y = \sqrt[3]{e^{x+1}\sqrt{e^{x-1}}}$; б) $y = 6\lg^2(0{,}5x+1)\sqrt[3]{\lg(0{,}5x+1)}$;

в) $y = \dfrac{\cos^2 x + 2}{\sqrt[5]{(\sin^2 x - 3)^4}}$; г) $y = \dfrac{3\ln^3(5x+4)}{\sqrt[3]{\ln(5x+4)}}$.

689. Решите уравнение $y' = 0$, если:

а) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{1+\ln x}}$; б) $y = \dfrac{2^{2x}}{\sqrt{2^{2x}-2}}$; в) $y = \dfrac{2+\ln x}{\ln^2 x}$.

690. Найдите угол между касательными, проведёнными к графикам функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, если:

а) $f(x) = \sqrt{3}\sin\dfrac{x}{3}$; $g(x) = \dfrac{2^{x+2}}{\ln 16}$;

б) $f(x) = \dfrac{3^{2x+0,5}}{\ln 9}$; $g(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

691. Напишите уравнение такой касательной к графику функции $y = e^{2x}$, которая параллельна прямой $y = 2x$.

692. Напишите уравнение такой касательной к графику функции $y = e^{0,5x}$, которая проходит через начало координат.

693. Найдите y', y'', y''', если $y = a \cdot e^{kx}$.

694. Выведите формулу для нахождения производной n-го порядка для функции $y = a \cdot e^{kx+b}$.

695. Докажите:

а) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$;

б) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; в) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

696. Вычислите $g'(0)$, если:

а) $g(x) = \arccos 3x + 3\arcsin x$; б) $g(x) = \arcsin 5x - 0{,}5\operatorname{arctg} x$;
в) $g(x) = \arccos x^2 - \operatorname{arcctg} 2x$; г) $g(x) = 2\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arctg}(1-x)$.

697. Найдите $f''(x)$, если:

а) $f(x) = \arccos 3x$; б) $3\arcsin x$; в) $f(x) = 0{,}5\operatorname{arctg} 5x$;
г) $f(x) = x\arccos x$; д) $x^2 \operatorname{arcctg} x$; е) $f(x) = \arcsin^2 x$.

Упражнения для повторения

698. Постройте график функции и укажите её промежутки монотонности:

а) $y = |2x + 3|$; б) $y = |4 - x^2|$.

699. Решите уравнение:

а) $9 - 2^x = 2^{3-x}$; б) $4^x - 0{,}25^{x-2} = 15$;

в) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 3^{x+3} = 12$; г) $5 \cdot 5^{x^2} - 5^{1-x^2} = 24$.

700. Решите неравенство:

а) $-5(x-1) < 3 - 7x$; б) $2(3-x) - x < 7 + 3x$;
в) $3(2-x) > x - 6$; г) $-3(2+x) + 5x \le 2x + 1$.

§ 18. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Исследовать функцию **— это значит установить её свойства:** указать её область определения и область значений; промежутки возрастания и убывания; промежутки, на которых функция приобретает положительные значения, на которых — отрицательные; выяснить, не является ли данная функция чётной или нечётной и т. д.

Одна из важных задач исследования функции — определение промежутков её возрастания и убывания. Как отмечалось в § 13, в тех точках, в которых функция возрастает, её производная (угловой коэффициент касательной) положительная, а в точ-

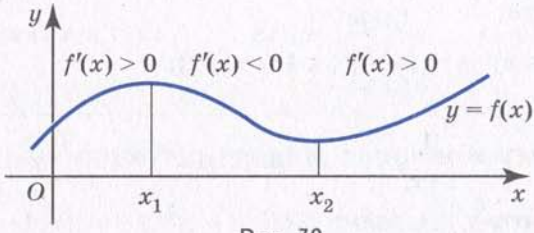


Рис. 70

ках убывания функции её производная отрицательная (*рис. 70*). Правильными будут следующие у т в е р ж д е н и я.

Если производная функции в каждой точке некоторого промежутка положительная, то функция на этом промежутке возрастает.

Если производная в каждой точке промежутка отрицательная, то функция на этом промежутке убывает.

Если производная в каждой точке промежутка тождественно равна нулю, то на этом промежутке функция постоянная.

Строгое доказательство этого утверждения достаточно громоздкое, поэтому мы его не приводим. Заметим только, что в нём выражается достаточный признак возрастания или убывания функции, но не необходимый. Поэтому функция может возрастать и на промежутке, в некоторых точках которого она не имеет производной. Например, функция $y = 2x + |x|$ возрастает на $\boldsymbol{R}$, хотя в точке $x = 0$ её производная не существует (*рис. 71*).

Из сказанного следует, что два соседних промежутка, на одном из которых функция возрастает, а на другом — убывает, могут разделяться только такой точкой, в которой производная функции равна нулю или не существует.

Внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна нулю или не существует, называют *критическими точками функции.*

Следовательно, *чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$, нужно решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ или найти все критические точки функции, разбить ими область определения функции на промежутки, а потом исследовать, на каких из них функция возрастает, а на каких — убывает.*

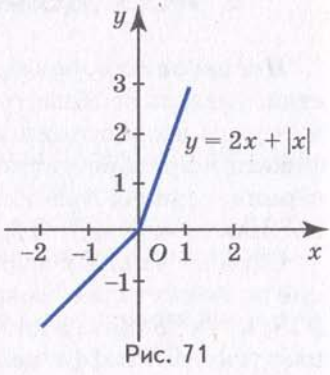


Рис. 71

Пример 1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Решение. $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Уравнение $3x(x - 2) = 0$ имеет корни $x = 0$ и $x = 2$. Это — критические точки. Область определения данной функции — множество $\boldsymbol{R}$ — они разбивают на три промежутка: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; \infty)$ (*рис. 72*). Производная функции на этих промежутках имеет соответственно такие знаки: +, −, +. Следовательно, данная функция на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(2; \infty)$ возрастает, а на $(0; 2)$ убывает.

Замечание. Если функция непрерывна в каком-нибудь конце промежутка возрастания или убывания, то эту точку можно присоединить к рассматриваемому промежутку. Поскольку функция $y = x^2 - 3x^2 + 2$ в точках 0 и 2 непрерывна, то можно утверждать, что она возрастает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; \infty)$, а на $[0; 2]$ — убывает.

Пример 2. Найдите промежутки убывания функции $y = \dfrac{2x^2}{x-3}$.

Решение. $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$.

$$y' = \frac{4x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 12x}{(x-3)^2} = \frac{2x(x-6)}{(x-3)^2}.$$

Критические точки: $x = 0$ и $x = 6$. Они всю область определения функции разбивают на интервалы: $(-\infty; 0)$, $(0; 3)$, $(3; 6)$, $(6; \infty)$ (*рис. 73*). Производная y' на этих промежутках имеет соответственно такие знаки: +, −, −, +. Следовательно, функция убывает на промежутках $(0, 3)$ и $(3, 6)$. Поскольку в точках $x = 0$ и $x = 6$ данная функция непрерывна, то ответ можно записать и так: $[0; 3)$ и $(3; 6]$.

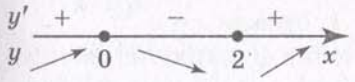


Рис. 72

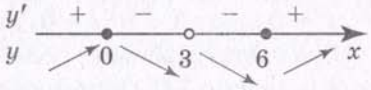


Рис. 73

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что означает исследовать функцию?
2. При каком условии функция возрастает (убывает) на некотором промежутке?
3. Что такое критические точки функции? Приведите примеры.
4. Как определить промежутки, на которых данная функция возрастает или убывает?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите критические точки функции $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$.

Решение. $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$. Найдём производную функции: $y' = \left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}\right)' = \dfrac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x+2) - x^{\frac{2}{3}}}{(x+2)^2} = \dfrac{2(x+2)-3x}{3x^{\frac{1}{3}}(x+2)^2} = \dfrac{4-x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2}$.

Найдём точки, в которых производная равна нулю или не существует: $y' = 0$, если $\dfrac{4-x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2} = 0$, отсюда $x = 4$.

y' — не существует, если знаменатель равен нулю, отсюда $x = 0$ и $x = -2$. Точка $x = -2$ не входит в область определения функции. Следовательно, функция имеет две критические точки: $x = 0$ и $x = 4$.

Ответ. 0 и 4.

2. Докажите, что функция $y = x^3 + 2x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Решение. $y' = 3x^2 + 2$. При любом значении x выражение $3x^2 + 2$ имеет положительное значение. Следовательно, данная функция возрастает на всей области определения, т.е. на множестве $\boldsymbol{R}$.

3. Установите, на каком промежутке функция $y = x \ln x$ возрастает, а на каком убывает.

Решение.

Способ 1. $D(y) = (0; \infty)$. Найдём производную функции: $y' = (x \ln x)' = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$.

Найдём критические точки функции:

$y' = 0$, если $1 + \ln x = 0$, или $\ln x = -1$, отсюда $x = e^{-1}$.

Эта точка разбивает область определения функции на два промежутка (*рис. 74*). Определим знак производной на каждом из них.

$y'(e) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2 > 0$;

$y'(e^{-2}) = 1 + \ln e^{-2} = 1 - 2 \ln e = -1 < 0$.

Следовательно, функция $y = x \ln x$ возрастает на промежутке $[e^{-1}; \infty)$, а убывает на $(0; e^{-1}]$.

Способ 2. Решим неравенство $y' < 0$ и $y' > 0$.

$1 + \ln x < 0$, или $\ln x < \ln e^{-1}$, отсюда $0 < x < e^{-1}$;

$1 + \ln x > 0$, или $\ln x > \ln e^{-1}$, отсюда $x > e^{-1}$.

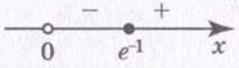


Рис. 74

Ответ. Возрастает, если $x \in [e^{-1}; \infty)$; убывает, если $x \in (0; e^{-1}]$.

Выполните устно

701. Найдите критические точки функции:

а) $y = x^3$; б) $y = \sin x$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = x^2 + 2x + 1$.

702. Какая из функций возрастает на всей области определения:

а) $y = \lg x$; б) $y = x^3$; в) $y = 2^{-x}$; г) $y = 0{,}5x$?

703. Какая из функций убывает на всей области определения:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \log_{1,5} x$; в) $y = 0{,}5^x$; г) $y = -5x$?

704. Используя рисунок 75, определите:

а) критические точки функции;

б) промежутки возрастания; промежутки убывания.

705. Может ли иметь только одну критическую точку функция:

а) монотонная; б) периодическая; в) чётная; г) нечетная?

Уровень А

Найдите критические точки функции (**706—710**).

706. а) $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$; б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

707. а) $f(x) = x - 2\sin x$; б) $f(x) = 3x^5 + 6x$.

708. а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$; б) $f(x) = x - \ln x$.

709. а) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

710. а) $f(x) = e^{-x} + x$; б) $f(x) = \cos 2x$.

Докажите, что функция $y = f(x)$ возрастает на всей области определения (**711—712**).

711. а) $f(x) = x^3 + 3$; б) $f(x) = 4x - 1$; в) $f(x) = 5 + \ln x$.

712. а) $f(x) = 2x - 3$; б) $f(x) = x + 2{,}5$; в) $f(x) = 5\sqrt{x}$.

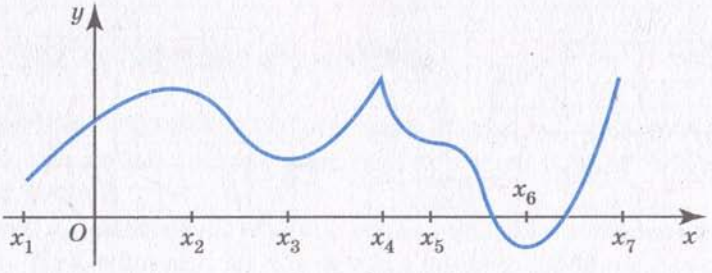


Рис. 75

Докажите, что функция $y = f(x)$ убывает на всей области определения (713—714).

713. а) $f(x) = 1 - x^3$; б) $f(x) = -4x + 3$; в) $f(x) = -\ln x$.

714. а) $f(x) = 0{,}5^x + 7$; б) $f(x) = \log_{0,1} x$; в) $f(x) = 5 - e^x$.

Уровень Б

715. Постройте график непрерывной функции, которая возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -1)$ и $(3; \infty)$, но убывает, если $x \in (-1; 3)$. Укажите, какие значения принимает функция в критических точках.

Найдите промежутки возрастания и убывания функции (716—718).

716. а) $f(x) = 3 - 2x^2$; б) $f(x) = 3x - x^2$.

717. а) $f(x) = x^4 - 2x^2$; б) $f(x) = x^2(x + 5)$.

718. а) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$; б) $f(x) = 8 - 6x^2 - x^4$.

719. Используя графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ (для каждого из рисунков 76, *а*, *б*), решите неравенства:

а) $f'(x) > 0$; б) $f'(x) < 0$; в) $f'(x) \geq 0$;

г) $g'(x) > 0$; д) $g'(x) \leq 0$; е) $g'(x) < 0$.

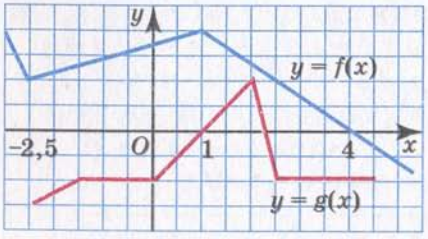
720. Докажите, что на всей области определения функция $y = a^x$: а) возрастает, если $a > 1$; б) убывает, если $0 < a < 1$.

721. Докажите, что на всей области определения функция $y = \log_a x$: а) возрастает, если $a > 1$; б) убывает, если $0 < a < 1$.

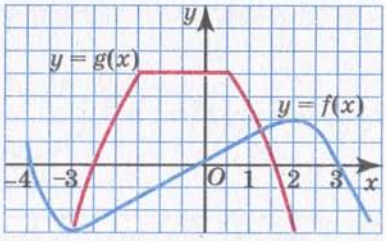
722. Докажите, что на всей области определения функция $y = \dfrac{\cos x}{\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)}$ возрастает.

Найдите промежутки возрастания и убывания функции (723—726).

723. а) $y = \dfrac{x-3}{x}$; б) $y = \dfrac{3}{x^2}$; в) $y = (x - 2)\sqrt{x - 1}$.



а



б

Рис. 76

724. а) $y = \dfrac{5x^2}{x+4}$; б) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; в) $y = xe^x + 1$.

725. а) $y = 5 + \sin 3x$; б) $y = 7 - \cos\dfrac{x}{2}$.

726. а) $y = 2x^2 + \ln x$; б) $y = (x-1)^2(x+1)^3$.

727. Какая из данных функций возрастает на всей области определения:
а) $f(x) = x^5 + 2x^3$; б) $f(x) = x + \sin x$; в) $f(x) = -2x - \cos x$?

Уровень В

Найдите промежутки возрастания и убывания функции (**728—729**).

728. а) $y = \cos^2 x + \sin x$; б) $y = e^{-x} - e^{-2x}$; в) $y = (3^x + 4)(3^x - 9)^2$.

729. а) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$; б) $y = x^2 e^{-x}$; в) $y = \cos^2 0{,}5x \sin x$.

730. Докажите, что при каждом действительном значении a уравнения $2x + \sin x = a$ и $\cos x - 4x = a$ имеют по одному корню.

731. При каких значениях параметра a функция возрастает на R:
а) $y = x^3 + 2ax + 1$; б) $y = ax - 2\cos x$?

732. При каких значениях параметра a функция убывает на R:
а) $y = ax - x^2 - x^3$; б) $y = (a-1)x^3 - 3(a+1)x^2 + 3(a-4)x + 2$?

Упражнения для повторения

733. Найдите НОК и НОД чисел 175 и 280.

734. Имеет ли смысл выражение:

а) $\log_2(3 - 2\sqrt{2})$; б) $\log_4(5 - 3\sqrt{2})$; в) $\log_{\cos 2\pi}(4 - \pi)$;

г) $\log_{2-\sqrt{5}} 4$; д) $\log_{3-\sqrt{10}} \dfrac{7}{8}$; е) $\sqrt{\log_4 0{,}9}$?

735. Расположите в порядке убывания числа:

а) $4{,}1^{2{,}2}$; $4{,}1^{\sqrt{10}}$; $4{,}1^{3{,}5}$; $4{,}1^3$; б) $0{,}2^{1{,}7}$; $0{,}2^{\sqrt{3}}$; $0{,}2^{3{,}9}$; $0{,}2^{1{,}5}$.

§ 19. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Введём несколько новых понятий. *Окрестностью точки* x_0 называется любой промежуток, для которого x_0 является внутренней точкой.

Точка x_0 называется *точкой минимума (максимума)* функции $y = f(x)$, если для всех x ($x \neq x_0$) из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$ ($f(x_0) > f(x)$).

Точки минимума и максимума обозначают $x_{\min}$ и $x_{\max}$ соответственно. Значение функции в точке минимума называется *минимумом функции*, а в точке максимума — *максимумом функции*. Обозначают их: $y_{\min}$ и $y_{\max}$.

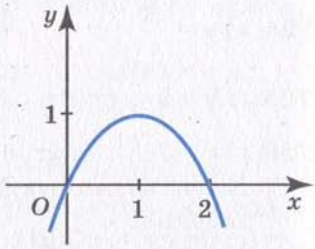


Рис. 77

Точки минимума и максимума функции называют *точками экстремума* (лат. extremum — край, конец). Значения функции в точках её экстремума — её *экстремальные значения, или экстремумы*.

Например, для функции $y = 2x - x^2$ точка $x = 1$ является точкой максимума (*рис. 77*). Её максимум: $y_{\max} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$.

Для функции $y = |x| - 3$ точка $x = 0$ является точкой минимума (*рис. 78*). Её минимум: $y_{\min} = 0 - 3 = -3$.

Функция, график которой изображён на рисунке 75, имеет четыре экстремальные точки: x_2 и x_4 — точки максимума; x_3 и x_6 — точки минимума.

Точка экстремума функции не может принадлежать промежутку, на котором эта функция возрастает или убывает (почему?). Следовательно, те точки, в которых производная функции положительная или отрицательная, не могут быть точками её экстремума. Все остальные точки области определения функции являются её критическими точками. Поэтому *точками экстремума функции могут быть только её критические точки*. Это — необходимое условие существования экстремума.

Выбрать из критических точек функции точки экстремума позволяет достаточное условие существования экстремума.

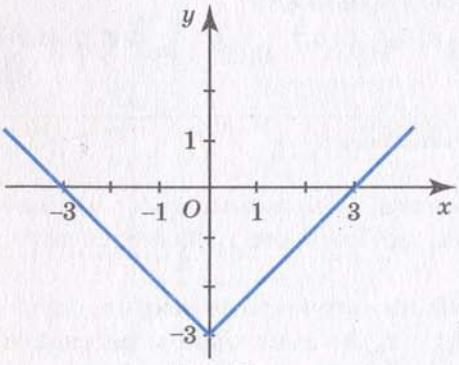


Рис. 78

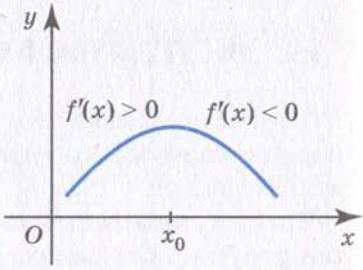


Рис. 79

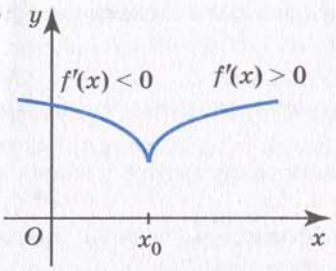


Рис. 80

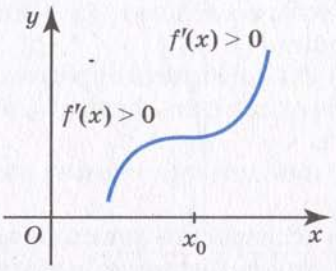


Рис. 81

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $(a; b)$ и x_0 — её критическая точка, $x_0 \in (a; b)$. Тогда:

точка x_0, при переходе через которую в направлении роста аргумента производная меняет знак с «плюса» на «минус», является точкой максимума, а точка, при переходе через которую производная меняет знак с «минуса» на «плюс» — точкой минимума.

Действительно, если производная функции $f(x)$ отрицательная, то при переходе через точку x_0 возрастание функции изменяется на убывание (*рис. 79*). В этом случае x_0 — точка максимума. Если же при переходе через точку x_0 убывание функции изменяется на возрастание, то x_0 — точка минимума (*рис. 80*).

Если же производная функции в точке x_0 равна нулю, а слева и справа от x_0 производная функции положительная (*рис. 81*) или слева и справа отрицательная, то x_0 не является точкой экстремума.

Пример 1. Найдите точки экстремума и экстремальные значения функции $y = 2x^3 + 6x^2 - 5$.

Решение. $y' = 6x^2 + 12x = 6x(x + 2)$.

Критические точки функции: $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$. При переходе через точку $x_1 = -2$ производная меняет знак с «+» на «−», поэтому $x_1 = -2$ — точка максимума. При переходе через точку $x_2 = 0$ производная меняет знак с «−» на «+», поэтому $x_2 = 0$ — точка минимума (*рис. 82*).

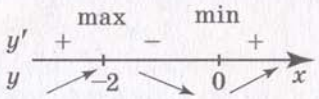


Рис. 82

$$y_{\max} = 2 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 5 = 3,$$

$$y_{\min} = 2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 5 = -5.$$

Ответ. $x_{\max} = -2$, $y_{\max} = 3$; $x_{\min} = 0$, $y_{\min} = -5$.

Нахождение экстремумов функции можно оформлять в виде таблицы, как на с. 176. Особенно это удобно при общем исследовании функции, когда находят не только её экстремумы, но и другие свойства, строят её график.

Чтобы исследовать функцию, можно пользоваться следующей схемой:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на чётность, нечётность, периодичность;

3) найти точки пересечения графика функции с осями координат;

4) исследовать функцию на монотонность, то есть найти промежутки возрастания и убывания функции;

5) найти точки экстремума и экстремальные значения функции;

6) найти асимптоты графика функции;

7) построить график функции.

Пример 2. Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ и постройте её график.

Решение. Область определения функции — все действительные числа, кроме $x=-1$. Поскольку она не симметрична относительно нуля, то функция не может быть чётной или нечётной. Функция непериодическая.

Уравнение $\dfrac{x^2+3}{x+1}=0$ не имеет решений, поэтому график функции не пересекает ось x. Ось y он пересекает в точке с ординатой $f(0)=3$.

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

Критические точки: $x_1=-3$, $x_2=1$.

Составим и заполним таблицу.

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	не сущ.	−	0	+
$f(x)$	↗	−6	↘	не сущ.	↘	2	↗
		max				min	

На промежутках $(-\infty;-3]$ и $[1;\infty)$ функция возрастает, на промежутках $[-3;-1)$ и $(-1;1]$ функция убывает.

$x_1=-3$ — точка максимума, $f(-3)=-6$;

$x_2 = 1$ — точка минимума, $f(1) = 2$.

Область значений функции: $(-\infty; -6] \cup [2; \infty)$.

График функции имеет вертикальную асимптоту $x = -1$, так как

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x^2+3}{x+1} = +\infty, \text{ а } \lim_{x \to -1-0} \frac{x^2+3}{x+1} = -\infty.$$

График этой функции изображён на рисунке 83.

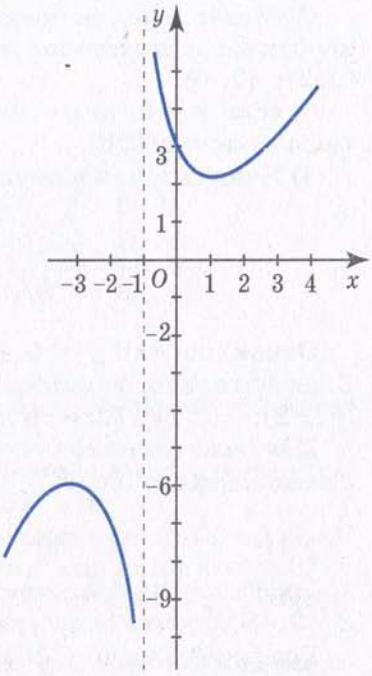


Рис. 83

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое окрестность точки?
2. Что такое точка максимума функции? А точка минимума?
3. Что такое точки экстремума функции? А её экстремумы?
4. Как можно найти точки экстремума функции?
5. Как находят асимптоты графика функции?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Может ли нечётная функция иметь экстремум в точке $x = 0$? А чётная функция?

Р е ш е н и е. Нечётная функция не может. Если в окрестности точки $x = 0$ функция имеет экстремум, то с одной стороны от нуля она возрастает, а с другой — убывает, или наоборот. А нечётная функция — или только возрастает, или только убывает в окрестности точки $x = 0$. Чётная функция может. Например, функция $y = x^2$.

2. Существуют ли такие числа a и b, при которых имеет экстремум функция $f(x) = (x - a)^3 + b$?

Р е ш е н и е. При любых действительных значениях a и b $f'(x) = 3(x - a)^2$. В каждой точке x производная данной функции неотрицательная. Функция $f(x)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$, поэтому не может иметь экстремумов.

О т в е т. Не существуют.

3. Исследуйте функцию $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ и постройте её график.

Р е ш е н и е. 1) $D(y) = (\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.

2) Функция — нечётная, поскольку $y(-x) = -\dfrac{x}{x^2 - 4} = -y(x)$.

Следовательно, её график симметричен относительно начала координат и достаточно исследовать функцию на промежутке $[0; 2) \cup (2; \infty)$.

3) если $x = 0$, то $y = 0$ — график пересекает оси координат только в точке $(0; 0)$.

4) Найдём производную функции:

$$y' = \left(\frac{x}{x^2-4}\right)' = \frac{x^2-4-x\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2} = -\frac{x^2+4}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

Очевидно, что $y' < 0$ для всех x из области определения. Следовательно, функция убывает на каждом из промежутков $(\infty; -2)$, $(-2; 2)$ и $(2; \infty)$ и не имеет максимумов и минимумов.

Для более точного построения вычислим значение функции в нескольких точках:

$$y(1) = -\frac{1}{3}; \quad y(1{,}5) = -\frac{6}{7}; \quad y(3) = 0{,}6; \quad y(4) = \frac{1}{3}.$$

График функции имеет вертикальные асимптоты $x = -2$ и $x = 2$. (Убедитесь самостоятельно.)

График функции изображён на рисунке 84.

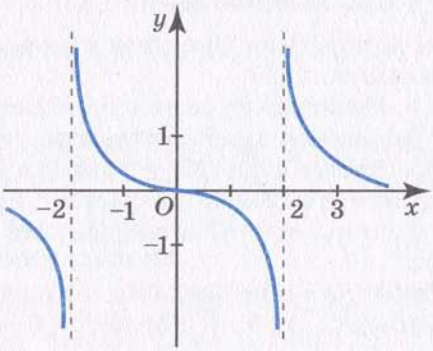


Рис. 84

Выполните устно

736. Какие из промежутков $(1; 3)$, $(0; 4)$, $(-3; 3)$, $(2; 3)$, $[2; 3]$ являются окрестностями точки $x = 2$?

737. Назовите точки экстремума функции, график которой изображён на рисунке 85.

738. Функция определена и возрастает на отрезке $[-7; 7]$. Может ли точка её экстремума принадлежать этому отрезку?

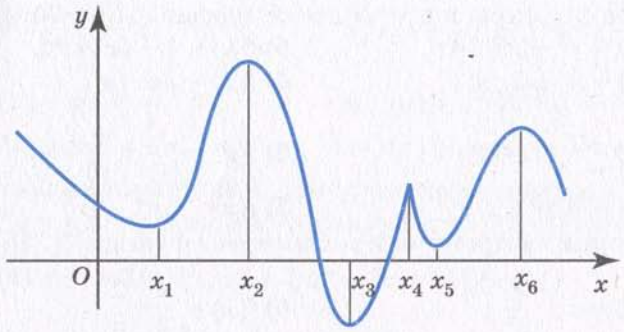


Рис. 85

739. Докажите, что функция $y = x^2 - 4x + 1$ в точке $x = 2$ имеет минимум. Имеет ли она максимум?

740. Как, пользуясь производной, найти абсциссу вершины параболы — графика функции $y = ax^2 + bx + c$?

741. Сколько точек экстремума может иметь функция $y = f(x)$, где $f(x)$ — многочлен третьей, четвёртой или пятой степени?

742. Существует ли функция, которая имеет множество экстремумов?

743. Приведите пример функции, которая имеет один экстремум.

Уровень А

744. Найдите точку минимума функции:
а) $y = x + x^2$; б) $y = x^2 - 6x - 3$; в) $y = 5x^2 - 4x$.

745. Найдите точку максимума функции:
а) $y = 5 - x^2$; б) $y = 1 - x - x^2$; в) $y = x - 2x^2$.

746. Найдите точки экстремума функции:
а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; б) $y = 1 + 8x^2 - x^4$; в) $y = -x^3 + 12x + 7$.

Найдите точки экстремума и экстремумы функции (**747—749**).

747. а) $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$; б) $f(x) = x^2 + x + 1$.

748. а) $f(x) = x^3 - 3x + 5$; б) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

749. а) $f(x) = 8 - 12x - x^3$; б) $f(x) = 1 + 8x^2 - x^4$.

Уровень Б

750. Постройте график непрерывной функции, которая убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 1]$ и $[3; 5]$, а возрастает на двух других $[1; 3]$ и $[5; \infty)$. Учтите, что минимальные значения данной функции равны между собой. Для построенного графика выпишите все точки экстремума и экстремальные значения функции.

Исследуйте функцию и постройте её график (751—754).

751. а) $f(x)=x^2-2x+4$; б) $f(x)=4+5x-x^2$.

752. а) $f(x)=x^3+3x+2$; б) $f(x)=3x-x^3$.

753. а) $f(x)=\frac{x^4}{4}+8x+5$; б) $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{4}$.

754. а) $f(x)=4x^2-x^4$; б) $f(x)=5x^3-3x^5$.

Найдите точки экстремума и экстремумы функции (755—758).

755. а) $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$; б) $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$.

756. а) $f(x)=x-2\cos x$; б) $f(x)=x+2\sin x$.

757. а) $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$; б) $f(x)=10\cos x-5x$.

758. а) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$; б) $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$.

759. Докажите, что не имеет экстремумов функция:

а) $f(x)=2x+\sin x$; б) $f(x)=-3x-\cos x$.

760. Докажите, что при $a>0$ и $b^2<3ac$ не имеет экстремумов функция $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

761. Найдите точки экстремума и экстремальные значения функции:

а) $y=|x-5|$; б) $y=|2x-3|$; в) $y=|3x+6|+1$.

Найдите экстремумы функции (762—763).

762. а) $y=x-\ln(1+x)$; б) $y=xe^{-x}$; в) $y=x-\sqrt[3]{x^2}$.

763. а) $y=\frac{\ln^2 x}{x}$; б) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; в) $y=\frac{e^{x+1}}{x+1}$.

764. Исследуйте функцию и постройте её график:

а) $y=\frac{2x}{1-x^2}$; б) $y=\frac{3x}{1+x^2}$; в) $y=1+\frac{1}{x}$; г) $y=\frac{x}{x-1}$.

Уровень В

765. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функции:

а) $y=x^3+3x^2+3x+3|x+1|+1$; б) $y=4x^3-x|x-2|$;

в) $y=2\cdot 9^{3x}-4\cdot 9^{2x}+2\cdot 9^x$; г) $y=\cos^2 2x\sin 4x$.

Исследуйте функцию и постройте её график (766—767).

766. а) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$; б) $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$;

в) $y = \dfrac{(x-1)^2}{\ln(x-1)}$; г) $y = x + \ln(1-2x)$.

767. а) $f(x) = x\sqrt{3-x}$; б) $f(x) = x^2\sqrt{x+2}$;

в) $f(x) = \sin^2 x + \sin x$; г) $f(x) = \cos x - \cos^2 x$.

768. При каких значениях параметра a точки экстремумов функции $y = f(x)$ принадлежат промежутку $[-3; 8]$, если:

а) $f(x) = x^3 - 3(a+1)x^2 + 3(a^2 + 2a - 15)x + 21$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - 1)x - 6$?

769. Функция $f(x)$ чётная и имеет максимум в точке $x = 2$, а в точке $x = 5$ — минимум. Имеет ли эта функция другие экстремумы? Какие и в каких точках? Задайте графически и аналитически (с помощью формулы) одну из таких функций.

770. Функция $\varphi(x)$ нечётная и в точке $x = -3$ имеет минимум, а в точке $x = -2$ — максимум. Имеет ли эта функция другие экстремумы? Какие и в каких точках? Задайте графически и аналитически (с помощью формулы) одну из таких функций.

771. Постройте график функции $y = f(x)$ и найдите количество корней уравнения $f(x) = a$ для каждого действительного значения параметра a.

а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$; б) $f(x) = 2x^2 - x^4 + 5$;

в) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 3$; г) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$.

772. При каких значениях параметра m минимум функции $y = |x^2 - 4x + 3| + mx$ больше 2?

Упражнения для повторения

773. Площадь прямоугольника равна 120 см^2. Найдите его стороны, если одна из них на 20 % больше другой.

774. Решите неравенство:

а) $\log_2 x - 2\log_x 2 > -1$; б) $\log_3 x + 2\log_x 3 \le 3$;

в) $\log_3 x - 6\log_x 3 < 1$.

775. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \dfrac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} - \dfrac{2a^2}{a-b}$; б) $\dfrac{3xy - y^2}{x-y} - \dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

§ 20. ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЮ ИХ ГРАФИКОВ

При помощи первой производной можно исследовать функцию на монотонность и экстремумы и схематично построить график. Оказывается, что поведение некоторых функций не всегда можно охарактеризовать, используя первую производную. Более детальное исследование проводится при помощи второй производной. Вспомним, что такое вторая производная.

Пусть функция $y = f(x)$ является дифференцируемой, $x \in [a;b]$, её производная $f'(x)$ — функция, которая также дифференцируема. Тогда можно найти производную $(f'(x))' = f''(x)$. Это производная второго порядка, или вторая производная функции $y = f(x)$.

Например, найти производную 2-го порядка функции $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ означает найти производную этой функции $y' = 3x^2 - 8x + 5$ и полученную функцию продифференцировать: $y'' = 6x - 8$.

Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой* на интервале $(a; b)$, если все её точки, кроме точки касания, лежат ниже произвольной её касательной на этом интервале (на *рис. 86 — 1*).

Кривая $y = f(x)$ называется *вогнутой* на интервале $(a; b)$, если все её точки, кроме точки касания, лежат выше произвольной её касательной на этом интервале (на *рис. 86 — 2*).

Точкой перегиба называется такая точка кривой, которая отделяет её выпуклую часть от вогнутой.

Интервалы выпуклости и вогнутости находят при помощи такой теоремы.

Теорема. **Если вторая производная дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ отрицательна ($f''(x) < 0$) на интервале $(a; b)$, то кривая $y = f(x)$ выпуклая на данном интервале; если вторая производная функции $y = f(x)$ положительная ($f''(x) > 0$), то кривая вогнутая на $(a; b)$.**

Из теоремы следует, что точками перегиба кривой $y = f(x)$ могут быть только точки, в которых вторая производная $f''(x)$ равна нулю или не существует. Такие точки называют *критическими точками второго рода*.

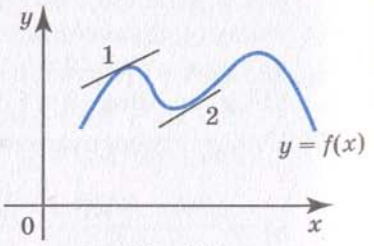


Рис. 86

Установим достаточное условие существования точки перегиба.

Теорема. Пусть x_0 — критическая точка второго рода функции $y = f(x)$. Если при переходе через точку x_0 производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба кривой $y = f(x)$.

Для нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба графика функции целесообразно пользоваться следующей схемой:

1) найти область определения функции;

2) найти критические точки второго рода;

3) определить знак второй производной на образованных интервалах. Если $f''(x) < 0$, то кривая выпуклая; если $f''(x) > 0$ — кривая вогнутая;

4) если производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба кривой $y = f(x)$.

Пример 1. Найдите интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

Решение. 1) Область определения функции: $\boldsymbol{R}$.

2) Найдём вторую производную: $y' = 4x^3 - 12x$; $y'' = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$. Критические точки второго рода: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Других критических точек нет.

3) Разбиваем область определения на интервалы $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ и определяем знак второй производной на каждом из них.

Если $x \in (-\infty; -1)$, то $y''(x) > 0$, поэтому кривая вогнутая.

Если $x \in (-1; 1)$, то $y''(x) < 0$, поэтому кривая выпуклая.

Если $x \in (1; +\infty)$, то $y''(x) > 0$ — кривая вогнутая.

Следовательно, точки $(-1; 0)$ и $(1; 0)$ — точки перегиба кривой.

Рассмотрим ещё один компонент в исследовании функций, благодаря которому упрощается построение некоторых графиков. Это асимптоты. В предыдущих параграфах рассматривались горизонтальные и вертикальные асимптоты. Повторим, расширим и обобщим это понятие. Асимптоты бывают *вертикальные, наклонные и горизонтальные* (*рис. 87*).

Рис. 87

Напомним, что прямая $x = a$ будет *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если при $x \to a$ (справа или слева) значение функции $y = f(x)$ стремится к бесконечности, т.е. выполняется одно из условий: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$.

Уравнение наклонной асимптоты: $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$. Если записанные пределы существуют, то существует наклонная асимптота; если хотя бы один из них не существует или равен ∞, то кривая наклонной асимптоты не имеет.

Если $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, поэтому $y = b$ — *уравнение горизонтальной асимптоты.*

Замечание. Рассмотренные пределы могут быть односторонними, а под символом ∞ следует понимать $+\infty$ и $-\infty$. При этом указанные пределы могут быть разными при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

Пример 2. Найдите асимптоты кривых:

а) $y = \dfrac{4}{1 - x^2}$; б) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$; в) $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Решение. а) $y = \dfrac{4}{1 - x^2}$. Найдём вертикальные асимптоты. Поскольку функция не определена в точках $x = 1$, $x = -1$ и $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4}{1 - x^2} = \infty$, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4}{1 - x^2} = \infty$, то прямые $x = 1$ и $x = -1$ — вертикальные асимптоты.

Найдём наклонную асимптоту: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{(1 - x^2)x} = 0$;

$b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4}{1 - x^2} - 0 \cdot x \right) = 0$. Кривая имеет горизонтальную асимптоту, её уравнение: $y = 0$.

Следовательно, заданная кривая имеет три асимптоты: $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$.

б) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$. Найдем вертикальные асимптоты.

Поскольку функция не определена в точках $x=2$ и $x=-2$ и $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3}{x^2-4}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3}{x^2-4}=-\infty$, то прямые $x=2$ и $x=-2$ — вертикальные асимптоты.

Для наклонной асимптоты $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x^2-4)}=1$;

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=0.$$ Значит, прямая $y=x$ — наклонная асимптота. Горизонтальной асимптоты нет.

Итак, асимптоты кривой: $x=2$, $x=-2$, $y=x$.

в) $y=\sqrt{1+x^2}$. Будем искать наклонные асимптоты:

1) если $x\to+\infty$: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x^2}{x^2}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0.$$

Следовательно, $y=x$ — наклонная асимптота, если $x\to+\infty$.

2) если $x\to-\infty$: $k=-1$, $b=0$ (проверьте самостоятельно), отсюда $y=-x$ — наклонная асимптота, если $x\to-\infty$.

Следовательно, заданная кривая имеет две асимптоты: $y=x$ $(x\to+\infty)$ и $y=-x$ $(x\to-\infty)$.

Определение точек перегиба, интервалов выпуклости и асимптот существенно помогает в построении графиков различных функций.

Расширим схему исследования функции, представленную на с. 176.

Полная схема исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на чётность и периодичность.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найти интервалы знакопостоянства.
5. Найти первую производную, промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и экстремумы функции.
6. Найти вторую производную. Определить интервалы выпуклости графика функции и точки перегиба.
7. Исследовать поведение функции на концах промежутков определения.
8. Найти асимптоты графика функции.
9. Построить график функции.

Пример 3. Исследуйте функцию $y = \dfrac{|x|}{(x-1)^2}$ и постройте её график.

Решение.

1) Область определения функции: $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Функция ни чётная, ни нечётная, ни периодическая.

3) $(0; 0)$ — точка пересечения графика функции с осями координат.

4) $y > 0$, если $x \neq 1$.

5) Чтобы найти производную функции, запишем её в виде

$$y = \begin{cases} \dfrac{x}{(x-1)^2}, & x \geq 0, \\ -\dfrac{x}{(x-1)^2}, & x < 0. \end{cases}$$

Поскольку в точке $x = 0$ функция производной не имеет, то найдем производную отдельно для $x > 0$ и $x < 0$. Имеем:

$$y' = \begin{cases} -\dfrac{x+1}{(x-1)^3}, & x > 0, \\ \dfrac{x+1}{(x-1)^3}, & x < 0. \end{cases}$$

Функция имеет две критические точки:

$x = 0$ (производная не существует) и $x = -1$ (производная равна нулю).

Составим и заполним таблицу для первой производной

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
y'	+	0	−	Не сущ.	+	Не сущ.	−
y	↗	$\frac{1}{4}$ max	↘	0 min	↗	Не сущ.	↘

Из таблицы видно, что функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[0; 1)$, а убывает на промежутках $[-1; 0]$ и $(1; \infty)$.

Первая производная при переходе через точку $x = -1$ меняет знак с «+» на «−», а при переходе через точку $x = 0$ — с «−» на «+», поэтому $x = -1$ — точка максимума, а $x = 0$ — точка минимума.

6) Найдём вторую производную:

$$y'' = \begin{cases} \dfrac{2x+4}{(x-1)^4}, & x > 0, \\ -\dfrac{2x+4}{(x-1)^4}, & x < 0. \end{cases}$$

Функция имеет две критические точки второго рода:

$x = 0$ (вторая производная не существует) и $x = -2$ (вторая производная равна нулю).

Составим и заполним таблицу для второй производной

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
y''	+	0	−	Не сущ.	+	Не сущ.	+
y	⌣	$\frac{2}{9}$ перег.	⌢	0 перег.	⌣	Не сущ.	⌣

Как видим из таблицы, кривая выпуклая на промежутке $(-2; 0)$, а вогнутая на промежутках $(-\infty; -2)$, $(0; 1)$ и $(1; \infty)$.

Вторая производная при переходе через точку $x = -2$ меняет знак с «+» на «−», а при переходе через точку $x = 0$ — с «−» на «+», поэтому $x = -2$ и $x = 0$ — точки перегиба. В этих точках на графике выпуклость меняется на вогнутость и наоборот.

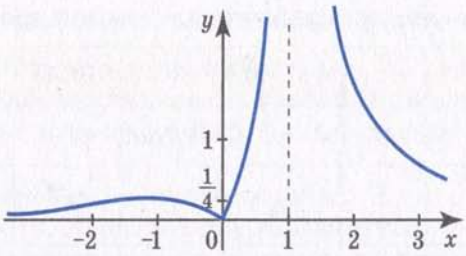


Рис. 88

7) Исследуем поведение заданной функции на концах промежутков определения:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x-1)^2}=0;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{(x-1)^2}=0;$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x}{(x-1)^2}=+\infty;\ \lim_{x\to1+0}\frac{x}{(x-1)^2}=+\infty.$$

8) Найдём асимптоты. Функция не определена в точке $x=1$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}\frac{x}{(x-1)^2}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{x}{(x-1)^2}=\infty$, то $x=1$ — вертикальная асимптота.

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{(x-1)^2}=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{(x-1)^2}=0$, то $y=0$ — горизонтальная асимптота.

9) Используя полученные данные, построим график функции (*рис. 88*).

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое вторая производная?
2. Какую кривую называют выпуклой на интервале?
3. Какую кривую называют вогнутой на интервале?
4. Что такое точка перегиба?
5. Как находят интервалы выпуклости и вогнутости?
6. Какие точки называют критическими точками второго рода?
7. Какими бывают асимптоты кривой?
8. Каково уравнение наклонной асимптоты?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривых: а) $y=3x^2-x^3$; б) $y=\sqrt{1+x^2}$.

Р е ш е н и е. а) $y = 3x^2 - x^3$.

1) Область определения функции — $\boldsymbol{R}$.

2) Найдём первую и вторую производные. Имеем: $y' = 6x - 3x^2$; $y'' = 6 - 6x$. Найдём критические точки второго рода: $6 - 6x = 0$, $x = 1$. Других критических точек второго рода нет.

3) Определим знак второй производной на каждом из интервалов $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$. Для этого достаточно определить знак производной в произвольной внутренней точке каждого интервала.

Если $x \in (-\infty; 1)$, то $y''(x) > 0$, поэтому на интервале $(-\infty; 1)$ кривая вогнутая.

Если $x \in (1; +\infty)$, то $y''(x) < 0$, поэтому на интервале $(1; +\infty)$ кривая выпуклая.

Точка $x = 1$ является точкой перегиба, поскольку при переходе через эту точку вторая производная меняет знак.

Следовательно, $M(1; 2)$ — точка перегиба.

б) $y = \sqrt{1 + x^2}$.

1) Область определения функции — $\boldsymbol{R}$.

2) Найдём критические точки второго рода: $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$;

$$y'' = \frac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1 + x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Как видим, вторая производная существует на множестве всех действительных чисел и ни в одной точке в ноль не превращается. А потому критических точек второго рода нет. Следовательно, нет и точек перегиба. На всей области определения $y'' > 0$, поэтому на множестве действительных чисел кривая вогнутая.

2. Найдите асимптоты кривой $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$.

Область определения функции — $\boldsymbol{R}$, поэтому вертикальных асимптот нет.

Найдём наклонную асимптоту: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x} =$

$$= \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}} = 1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx);$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{x^3-2x^2})^3-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}}+1}=\frac{-2}{1+1+1}=-\frac{2}{3}.$$

Следовательно, прямая $y=x-\frac{2}{3}$ — наклонная асимптота данной кривой. Других асимптот кривая не имеет.

Выполните устно

776. Найдите вторую производную функции:
а) $y=5x^4$; б) $y=5+x^4$; в) $y=e^x$; г) $y=\sin x$.

777. На рисунке 89 представлен график функции $y=f(x)$. Установите: а) промежутки возрастания и убывания; б) точки экстремума; в) интервалы выпуклости и вогнутости; г) точки перегиба.

778. На рисунке 90 представлен график функции $y=g(x)$. Установите: а) промежутки возрастания и убывания; б) точки экстремума; в) интервалы выпуклости и вогнутости; г) точки перегиба; д) асимптоты.

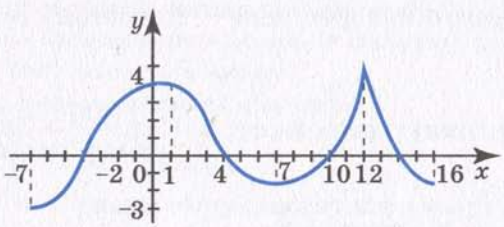


Рис. 89

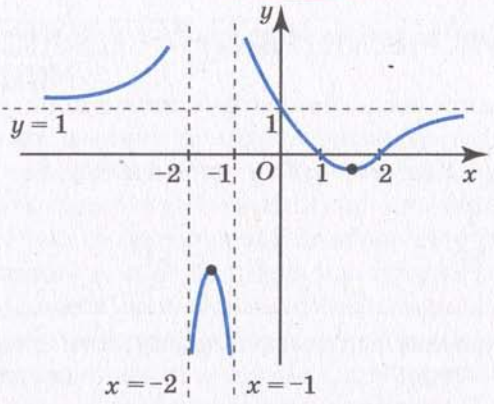


Рис. 90

779. Какие асимптоты имеет кривая, заданная уравнением:

а) $y = x^{-1}$; б) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$?

Уровень А

Найдите вторую производную функции (**780—781**).

780. а) $y = 6x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 2x + 7$; б) $y = e^{3x^2 - 4}$;

в) $y = \sin 2x - x$; г) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

781. а) $y = 5x^7 - 4x^6 + 5x^4 - 3x + 2$; б) $y = \ln^2 x$;

в) $y = 2x + \cos 3x$; г) $y = \sqrt[3]{x + 2}$.

782. Докажите, что на всей области определения:

а) функция $y = 5x^2 - 12x + 6$ является вогнутой;

б) функция $y = \ln(x^2 - 1)$ является выпуклой.

Найдите интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривых (**783—784**).

783. а) $y = x^2 + 4$; б) $y = 3x^3 - 6x$; в) $y = 3x^{-2}$.

784. а) $y = 12x - 3x^2$; б) $y = 7 - 2x^3$; в) $y = 2x^{-3}$.

Уровень Б

Найдите интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривых (**785—786**).

785. а) $y = x^4 - 1{,}5x^2 + 1$; б) $y = x^5 - 5x^3 - 5x^2 + 30$; в) $y = \operatorname{tg} x$.

786. а) $y = x^4 - x^2$; б) $y = 3x^5 - 5x^3 - 15x^2$; в) $y = \operatorname{ctg} x$.

Найдите асимптоты кривых (**787—788**).

787. а) $y = x + \dfrac{1}{x}$; б) $y = \dfrac{1}{x - 1} + 2$.

788. а) $y=4x^2+\frac{1}{x}$; б) $y=\frac{x}{x^2-1}$.

Проведите полное исследование функции и постройте её график (**789—790**).

789. а) $y=(x-1)^2(x+3)^2$; б) $y=x^5-5x^3+5x^2$.

790. а) $y=x^2+\frac{1}{4x}$; б) $y=\frac{x}{x^2+1}$.

Уровень В

Найдите интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривых (**791—792**).

791. а) $y=x^2+\frac{1}{x}$; б) $y=\frac{2x}{x^2-1}$; в) $y=\frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x+2}}$.

792. а) $y=\sin x+\cos x$; б) $y=x+\cos x$; в) $y=e^{-x^2}+2x$.

Найдите асимптоты кривых (**793—794**).

793. а) $y=\frac{1}{(3x^2-1)^2}$; б) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; в) $y=x+\operatorname{arctg} x$.

794. а) $y=\frac{x^3}{3-x^2}$; б) $y=\frac{1}{x^2-2x}$; в) $y=2^{\operatorname{arctg} x}$.

Проведите полное исследование функции и постройте её график (**795—796**).

795. а) $y=\frac{12x}{x^2+9}$; б) $y=\frac{x^3+4}{x^2}$.

796. а) $y=\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$; б) $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x^2}$.

Упражнения для повторения

797. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x=0$; б) $\sin 6x-\sin 4x=0$.

798. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=e^{\cos 2x}$ в точке $x_0=\frac{\pi}{4}$.

799. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2-xy=3{,}36, \\ 3x+y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-y^2=2, \\ 3x+y=-4. \end{cases}$

§21. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

От максимумов и минимумов функции следует отличать её *наибольшее* и *наименьшее значения* на промежутке. Функция может иметь несколько максимумов (минимумов) на некотором промежутке (*рис. 91*), но не более одного наибольшего (наименьшего) значения. Функция может не иметь максимума (минимума) на промежутке, но иметь наибольшее (наименьшее) значение.

Например функция, график которой изображён на рисунке 91, наибольшее значение имеет в точке x_2, а наименьшее — в точке x_3, а функция $f(x) = x^2$, заданная на промежутке $[-1, 2]$, имеет наименьшее значение $f(0) = 0$ и наибольшее значение $f(2) = 4$ (*рис. 92*).

Наибольшее и наименьшее значения функции тесно связаны с её областью значений. Если область значений непрерывной функции — промежуток $[m; M]$, то m — наименьшее значение данной функции, M — наибольшее её значение.

Поскольку непрерывная функция наибольшее и наименьшее значения может иметь только в точках экстремума или на концах отрезка, то для нахождения этих значений пользуются таким правилом.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$, нужно вычислить её значения $f(a)$, $f(b)$ на концах данного промежутка и в критических точках, принадлежащих этому промежутку, а потом выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Записывают так: $\max\limits_{[a;\,b]} f(x)$ и $\min\limits_{[a;\,b]} f(x)$.

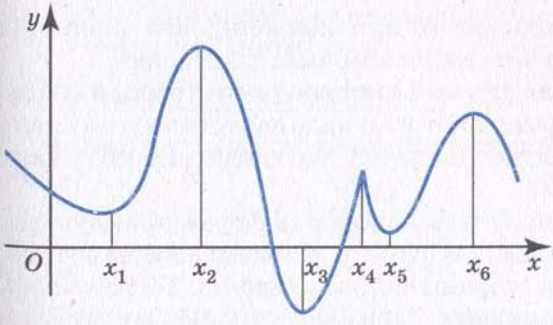


Рис. 91

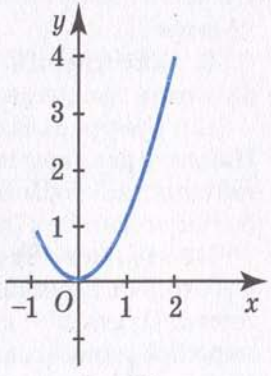


Рис. 92

Пример 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ на промежутке $[-4; 4]$.

Решение. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$. Критические точки: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

$f(-4) = 10$, $f(-3) = 17$, $f(1) = -15$, $f(4) = 66$.

Из этих четырёх значений функции наименьшим является -15, а наибольшим — 66.

Ответ. $\max\limits_{[-4; 4]} f(x) = f(4) = 66$, $\min\limits_{[-4; 4]} f(x) = f(1) = -15$.

Пример 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Решение. Областью определения функции является промежуток $(0; \infty)$.

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Если $y' = 0$, то $1 - \ln x = 0$, отсюда $x = e$.

Если $0 < x < e$, то $y' > 0$, а если $x > e$, то $y' < 0$. Следовательно, $x = e$ — точка максимума.

Поскольку на промежутке $(0; \infty)$ функция имеет только одну критическую точку $x = e$ и эта точка является точкой максимума, то наибольшее значение функция принимает именно в этой точке и оно равно $y(e) = \dfrac{1}{e}$. Наименьшего значения функция не имеет.

Ответ. $\max y = y(e) = \dfrac{1}{e}$. Наименьшего значения функция не имеет.

К нахождению наибольшего или наименьшего значений функции сводится решение многих прикладных задач.

Пример 3. Есть квадратный лист жести со стороной 60 см. Найдите размеры квадратов, которые надо вырезать в углах данного листа, чтобы из полученной заготовки сделать коробку наибольшего объёма (*рис. 93*).

Решение. Чтобы получить коробку (в форме прямоугольного параллелепипеда), надо вырезать равные квадраты в углах листа. Пусть x — длина стороны такого квадрата. Тогда высота коробки равна x, а сторона основания $60 - 2x$. Объём коробки $V(x) = (60 - 2x)^2 x$ — функция от x.

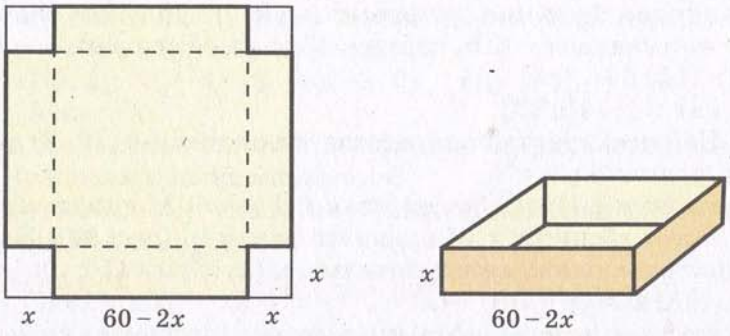


Рис. 93

Надо исследовать математическую модель задачи: при каком значении x функция $V(x) = (60 - 2x)^2 x$ на промежутке $(0; 30)$ принимает наибольшее значение.

$V(x) = (60 - 2x)^2 x = 3600x - 240x^2 + 4x^3$,

$V'(x) = 3600 - 480x + 12x^2$,

$3600 - 480x + 12x^2 = 0$,

$x^2 - 40x + 300 = 0$,

$x_1 = 10$, $x_2 = 30$.

Значение $x = 30$ не принадлежит промежутку $(0; 30)$. Поэтому $x = 10$.

Поскольку при $x < 10$ $V'(x) > 0$, а при $x > 10$ $V'(x) < 0$, то $x = 10$ — точка максимума. Итак, в этой точке функция $V(x)$ принимает наибольшее значение.

О т в е т. Надо вырезать квадраты, стороны которых равны 10 см.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое наибольшее (наименьшее) значение функции на данном промежутке?
2. Означают ли одно и то же максимальное значение функции и её наибольшее значение?
3. Как найти наибольшее или наименьшее значение непрерывной функции на промежутке $[a; b]$?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите область значений функции $y = x^3 - 9x^2 - 7$, если $x \in [0; 10]$.

Р е ш е н и е. $y' = (x^3 - 9x^2 - 7)' = 3x^2 - 18x$. Найдём критические точки: $y' = 0$, если $3x^2 - 18x = 0$, или $3x(x - 6) = 0$, отсюда $x = 0$, $x = 6$.

Найдём значение функции на концах промежутка $[0; 10]$ и в критических точках: $y(0) = -7$; $y(6) = -115$; $y(10) = 93$.

Заданная функция непрерывна, её наибольшее значение 93, а наименьшее −115, значит, область её значений — отрезок $[-115; 93]$.

Ответ. $[-115; 93]$.

2. Найдите кратчайшее расстояние от точки $A\,(10, 2)$ до графика функции $y = x^2$.

Решение. Пусть ближайшая к A точка M графика функции имеет абсциссу x, её ордината равна x^2 (*рис. 94*). Найдём квадрат расстояния между точками $M\,(x; x^2)$ и $A\,(10; 2)$:

$$MA^2 = (x - 10)^2 + (x^2 - 2)^2 = x^4 - 3x^2 - 20x + 104.$$

Длина расстояния AM наименьшая, когда её квадрат наименьший. Итак, найдём наименьшее значение функции $f(x) = x^4 - 3x^2 - 20x + 104$.

$$f'(x) = 4x^3 - 6x - 20 = 2(x - 2)(2x^2 + 4x + 5).$$

Уравнение $2x^2 + 4x + 5 = 0$ действительных корней не имеет, поэтому функция $f(x)$ имеет одну критическую точку $x = 2$. Если $x < 2$, то $f'(x) < 0$, если $x > 2$, то $f'(x) > 0$. Следовательно, $x = 2$ — точка минимума. В этой точке функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

Наименьшее значение квадрата расстояния

$$MA^2 = (2 - 10)^2 + (2^2 - 2)^2 = 68,\ MA = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}\,.$$

Ответ. $2\sqrt{17}$.

Выполните устно

800. Имеет ли наибольшее значение функция:

а) $y = x^3$; б) $y = e^x$; в) $y = \lg x$; г) $y = 2x + 1$?

801. Укажите наименьшее значение функции:

а) $y = x^4$; б) $y = \sin x$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = 2^{|x|}$.

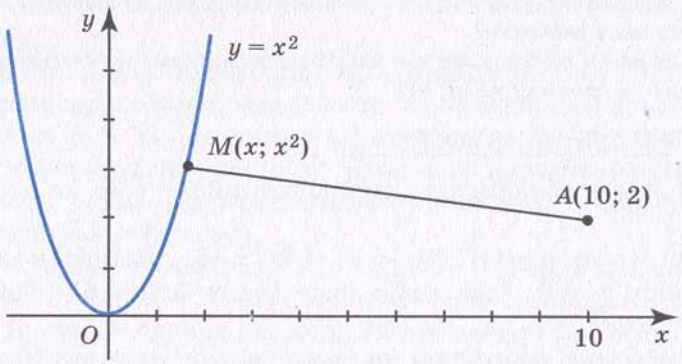


Рис. 94

802. Укажите наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^2$ на заданном промежутке:
а) $[0; 2]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-2; 0]$; г) $[-5; 2]$.

803. Может ли:
а) значение функции в точке максимума быть меньше её значения в точке минимума?
б) наибольшее значение функции быть меньше её максимума? А наоборот?

Уровень А

804. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 1$ на заданном промежутке:
а) $[0; 2]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-2; 0]$; г) $[-3; 3]$.

805. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^2 - 2x$ на заданном промежутке:
а) $[-1; 0]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-2; 0]$; г) $[0; 3]$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке (**806—808**).

806. а) $f(x) = x^2 - 4x$; $x \in [-3; 3]$; б) $f(x) = x - \ln x$; $x \in [1; e]$.

807. а) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$; $x \in [-2; 2]$; б) $f(x) = 0{,}5x^2 - 4\ln x$; $x \in [1; e]$.

808. а) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$; $x \in [-3; 1]$; б) $f(x) = \sin x$; $x \in [0; \pi]$.

809. Имеет ли функция $y = x^3 - 3x^2$ наименьшее или наибольшее значение на заданном промежутке? Установите, какое именно, если: а) $x \in (-\infty; 1)$; б) $x \in (1; \infty)$; в) $x \in (-\infty; 2)$; г) $x \in (0; \infty)$.

810. Число 10 разбейте на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

811. Какое положительное число вместе с обратным даёт наименьшую сумму?

812. Какое число в сумме со своим квадратом имеет наименьшее значение?

813. Площадь участка для страусов равна 40 000 м^2. Какими должны быть его размеры, чтобы на забор ушло наименьшее количество сетки рабицы?

814. Надо отгородить два пастбища в форме равных прямоугольников с общей стороной, чтобы сумма их площадей была равна 6 га. Найдите наименьшую возможную длину забора.

Уровень Б

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном промежутке (**815—818**).

815. а) $f(x) = x^5 - x^3 + x - 7$ на: 1) $[-2; 1]$; 2) $[-1; 2]$;
б) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ на: 1) $[0; 2]$; 2) $[-1; 5]$.

816. а) $f(x)=\sqrt{x+2}$ на: 1) $[-2;0]$; 2) $[0;2]$;

б) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$ на: 1) $[-4;0]$; 2) $[-3;3]$.

817. а) $f(x)=\sin x-\cos^2 x$ на: 1) $[-\pi;0]$; 2) $[0;\pi]$;

б) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ на: 1) $[-2;2]$; 2) $[0;3]$.

818. а) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ на: 1) $[1;3]$; 2) $[-4;-1]$;

б) $f(x)=2\sin\dfrac{x-\pi}{3}$ на $[0;2\pi]$.

819. Имеет ли наибольшее или наименьшее значение на $\boldsymbol{R}$ функция:

а) $f(x)=x^3-5x+2$; б) $f(x)=3-2x^2-x^5$?

820. Найдите область значений функции:

а) $y=x^6-3x^4+2$; б) $y=2-x^2-x^4$;

в) $y=\sqrt{2-x-x^2}$; г) $y=x+\dfrac{1}{x}$.

821. Длина отрезка AB равна 6, точка M — его середина. Найдите на отрезке AB такую точку X, чтобы произведение длин XA, XB, XM было наибольшим.

822. Какой из прямоугольников, вписанных в данный круг, имеет наибольшую площадь? Решите задачу двумя способами.

823. Какой из прямоугольников, вписанных в данный круг, имеет наибольший периметр?

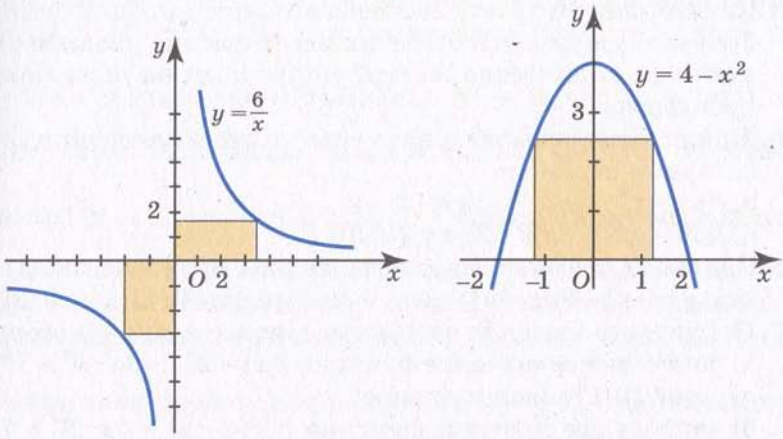
824. Из пунктов A и B прямолинейными дорогами AO и BO выехали одновременно два велосипедиста со скоростями 12 км/ч и 15 км/ч. Когда расстояние между велосипедистами будет наименьшим, если $AO=BO=60$ км, $\angle AOB=60^\circ$?

825. В трапеции $ABCD$ $AB=BC=CD=a$, $AD>BC$. Каким должен быть угол BAD, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

826. Какими должны быть размеры бассейна объёмом 32 м^3 с квадратным дном и вертикальными стенами, чтобы на его облицовку использовали наименьшее количество плитки?

Уровень В

827. Рассмотрите все возможные прямоугольники, две стороны которых лежат на осях координат, а одна из вершин — на графике функции $y=\dfrac{6}{x}$ (*рис. 95, а*). Какой из них имеет наибольшую площадь? Наименьший периметр?



а *б*

Рис. 95

828. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, вписанный в фигуру, ограниченную осью Ox и графиком функции $y = 4 - x^2$ (*рис. 95, б*)?

829. Фигура ограничена осью Ox, графиком функции $y = \sqrt{x}$ и прямой $x = 27$. Найдите стороны прямоугольника, вписанного в эту фигуру, если он имеет наибольшую площадь.

830. В точках A, B и C (как показано на рисунке 96) расположены столы с компьютерами, имеющими выход на один принтер P. В какой точке на AN следует разместить принтер, чтобы общая длина кабелей $AP + BP + CP$ была наименьшей?

831. Ёмкость лёгких человека, возраст которого не менее 10 лет, приближённо выражается функцией $t(x) = \dfrac{110(\ln x - 2)}{x}$, где $x \in [10; 100]$ — возраст человека в годах, $t(x)$ — ёмкость лёгких в литрах. Установите, в каком возрасте ёмкость лёгких человека максимальная и чему она равна.

832. С помощью программного обеспечения строят график функции $y = x - 2\cos x$ для всех x, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$. Найдите размеры наименьшего прямоугольника, содержащего этот график.

833. Найдите координаты точки на графике функции $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, наименее удалённой от начала координат.

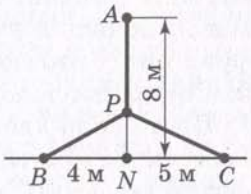


Рис. 96

834. Какими следует делать литровые консервные банки цилиндрической формы, чтобы на их изготовление уходило наименьшее количество жести? Допусками на швы можно пренебречь.

835. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:
а) $f(x) = x^3 - 3x|x-3|$, $x \in [0; 4]$;
б) $f(x) = 4x^3 - 3x|x-2|$, $x \in [0; 3]$.

836. При каких значениях параметра a наибольшее значение функции $y = -x^2 + 2ax - a^2 + 2a - 3$ на отрезке $[0; 1]$ равно -2?

837. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых:
а) наименьшее значение функции $f(x) = 25^x - 8a \cdot 5^x + 17$ на отрезке $[0;1]$ положительное;
б) наибольшее значение функции $f(x) = -9^x + 4a \cdot 3^x - 7$ на отрезке $[0; 2]$ отрицательное.

Упражнения для повторения

838. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3-x}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

839. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{ab^2}}$; б) $\dfrac{m}{n\sqrt[5]{m^3 n}}$; в) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x-1}}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$.

840. На ферме были гуси и несколько собак, которые их охраняли. Сколько гусей и сколько собак было на ферме, если вместе они имели 98 голов и 202 ноги?

§ 22. ПРОИЗВОДНАЯ КАК СКОРОСТЬ

До сих пор мы имели дело с *геометрическим смыслом* производной, то есть понимали под производной угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции. Не менее важно понять и *физический смысл* производной. Производная функции — это скорость её изменения, то есть скорость протекания процесса, который описывается данной функцией.

Пусть тело движется по прямой с переменной скоростью. Расстояние s, пройденное телом за время t, зависит от t. Эта зависимость $s = f(t)$ — закон движения данного тела. Найдём его мгновенную скорость $v(t_0)$ в момент t_0.

За время от t_0 до $t_0 + \Delta t$ тело проходит расстояние $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. За этот промежуток времени Δt тело движется со средней скоростью. Если $\Delta t \to 0$, то $\frac{\Delta s}{\Delta t} \to v(t_0)$, где $v(t_0)$ — скорость движения тела в момент t_0. С другой стороны — если при $\Delta t \to 0$ $\frac{\Delta s}{\Delta t} \to v(t_0)$, то $v(t_0)$ — значение производной функции s в точке t_0. Следовательно, если $s = f(t)$ — закон движения тела, то производная этой функции — скорость движения в момент t.

Рассмотрим конкретный пример. Как известно, свободное падение тела происходит по закону $s = \frac{g}{2}t^2$, где постоянная $g \approx 9{,}8$ м/с^2 — его ускорение. С какой скоростью тело движется в момент t после начала падения?

Решить задачу можно так. За время от t до $t + \Delta t$ тело проходит расстояние

$$\Delta s = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{g}{2}t^2 = \frac{g}{2}(2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2)$$

со средней скоростью $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t + \Delta t)$.

Если $\Delta t \to 0$, то $\frac{\Delta s}{\Delta t} \to gt$, т. е. $v(t) = gt$.

Получили результат, хорошо известный из курса физики.

Такой способ решения задачи нерационален, так вынуждены рассуждать те, кто не знает производной и её физического смысла. Если же мы знаем, что скорость прямолинейного движения — это производная функции, выражающей закон этого движения, то задачу можно решить проще:

$$v(t) = \left(\frac{g}{2}t^2\right)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Так можно находить не только скорость прямолинейного движения, но и скорость протекания многих процессов: химической реакции, радиоактивного распада, нагревания тела, таяния льда, плавления металла, размножения бактерий и т. д. Таким образом, *если некоторый процесс происходит по закону $y = f(t)$, то скорость протекания этого процесса в момент времени t можно определить по формуле $v(t) = f'(t)$.*

Кратко говорят: **производная — это скорость.**

Скорость движения также может изменяться. Скорость изменения скорости движения — его ускорение. Следовательно, ускорение — производная скорости. Если, например, скорость движения выражается формулой $v(t) = gt$, то его ускорение $a(t) = (gt)' = g$.

Другой пример. Если какой-то процесс происходит по закону

$$s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3,$$

то скорость его протекания в момент t: $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 10t$, а его ускорение в этот самый момент: $a(t) = v'(t) = 12t - 10$.

С помощью производной решают много задач из различных областей науки и практики. Приведём примеры часто применяемых формул, содержащих производную:

$\omega(t) = \varphi'(t)$ — угловая скорость — производная от угла поворота;

$a(t) = \omega'(t)$ — угловое ускорение — производная от угловой скорости;

$I(t) = q'(t)$ — сила тока — производная от количества электричества;

$N(t) = A'(t)$ — мощность — производная от работы;

$C(t) = Q'(t)$ — теплоёмкость — производная от количества теплоты;

$P(t) = V'(t)$ — производительность труда — производная от объёма продукции.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. В чём состоит геометрический смысл производной функции в точке?
2. Какова суть физического смысла производной функции в точке?
3. Как понимать выражение «производная — это скорость»?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Сигнальная ракета летит вертикально вверх так, что её движение описывается законом $s(t) = 98t - 4{,}9t^2$ (время t — в секундах, расстояние s — в метрах). Найдите:

а) скорость ракеты через 5 секунд движения;

б) на какую максимальную высоту долетит ракета?

Р е ш е н и е. а) Найдём скорость ракеты в любой момент времени как производную от функции $s(t)$:

$v(t) = s'(t)$, либо $v(t) = (98t - 4{,}9t^2)' = 98 - 9{,}8t$.

Тогда $v(5) = 98 - 9{,}8 \cdot 5 = 98 - 49 = 49$ (м/с).

б) Найдём точку экстремума функции $s(t)$, решив уравнения $s'(t) = 0$, или $98 - 9{,}8t = 0$. Отсюда $t = 10$ (с).

Если $t < 10$, то $s'(t) > 0$, если $t > 10$, то $s'(t) < 0$. Итак $t = 10$ с — точка максимума. Тогда $s(10) = 98 \cdot 10 - 4{,}9 \cdot 10^2 = 490$ (м).

Ответ. а) 49 м/с; б) 490 м.

2. Количество теплоты $Q(t)$, которое необходимо для нагревания воды массой 1 кг от 0 °С до температуры t °С ($0^\circ \le t \le 95^\circ$), приближённо можно определить по формуле

$Q(t) = 0{,}396 \cdot t + 2{,}081 \cdot 10^{-3}t^2 - 5{,}024 \cdot 10^{-7}t^3$.

Установите зависимость теплоёмкости воды $C(t)$ от температуры.

Решение. $C(t) = Q'(t) = (0{,}396 \cdot t + 2{,}081 \cdot 10^{-3}t^2 - 5{,}024 \cdot 10^{-7}t^3)' =$
$= 0{,}396 + 4{,}162 \cdot 10^{-3}t - 15{,}072 \cdot 10^{-7}t^2$.

3. Тело массой 10 кг движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 + t + 1$ (время t — в секундах, координата x — в метрах). Найдите: а) кинетическую энергию тела через 5 с после начала движения; б) силу, действующую на тело в это время.

Решение. а) Кинетическая энергия тела определяется формулой $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса тела, а v — скорость. Найдём скорость тела $v(t)$ в любой момент времени и через 5 с после начала движения — $v(5)$.

$v(t) = x'(t) = (t^2 + t + 1)' = 2t + 1, \quad v(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11$ (м/с).

Тогда $E = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{10 \cdot 11^2}{2} = 5 \cdot 121 = 605$ (Дж).

б) Сила, действующая на движущееся тело, определяется формулой $F = ma$. Найдём ускорение тела $a(t)$ в любой момент времени и через 5 с после начала движения — $a(5)$.

$a(t) = v'(t) = (2t + 1)' = 2$ (м/с^2), $a(5) = 2$ (м/с^2). Тогда $F = ma =$
$= 10 \cdot 2 = 20$ (Н).

Ответ. а) 605 Дж; б) 20 Н.

Выполните устно

841. Найдите скорость тела, движущегося по закону $s(t)$, где t измеряется в секундах, а s — в метрах:

а) $s(t) = 5t^2 + t$; б) $s(t) = 1 - 3t$; в) $s(t) = t^2 - 1$; г) $s(t) = 2t^3 + t$.

842. Найдите ускорение тела, движущегося по закону $s(t)$, где t измеряется в секундах, а s — в метрах:

а) $s(t) = t^2 + t$; б) $s(t) = 1 - 3t^2$; в) $s(t) = 5t - 1$; г) $s(t) = 2t^3 + 5$.

843. Как зависит производительность труда молодого работника

от времени работы, если объём изготовленной им продукции выражается формулой $V(t) = 10 + 6t^2 - t^3$?

Уровень А

844. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 100 + t^2$ (время t — в секундах, координата x — в метрах). Найдите скорость v этой точки в момент времени: а) $t = 5$ с; б) $t = 23$ с.

845. Работа, которую выполняет двигатель, определяется формулой $A(t) = 15t^2 + 360$ ($A(t)$ измеряется в джоулях, t — в секундах). Какую мощность развивает этот двигатель в момент времени t?

846. Определите скорость колебания тела, движущегося по закону:

а) $x(t) = 10\cos \pi t$; б) $x(t) = 2\sin(t - \pi)$; в) $x(t) = 0{,}1\cos 10\pi t$.

847. Точка движется так, что путь (в метрах), пройденный ею за t секунд, выражается формулой $s = 4t^2 + 3t$. Найдите:

а) скорость точки в любой момент времени;

б) ускорение точки в любой момент времени;

в) скорость и ускорение точки в момент времени $t = 5$ с.

848. Точка вращается вокруг оси по закону $\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (время t — в секундах, угол поворота $\varphi(t)$ — в радианах). Найдите угловую скорость точки:

а) в произвольный момент t; б) в момент $t = 4$ с.

849. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = 7t^3 - 5t$ (в метрах). Найдите его мгновенную скорость и ускорение в момент: а) $t = 1$ с; б) $t = 2$ с; в) $t = 3$ с.

850. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = 6t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (путь s — в метрах, время t — в секундах). В какой момент времени тело движется с наибольшей скоростью?

Уровень Б

851. Маховик, задерживаемый тормозом, вращается по закону $\varphi(t) = 4t - 0{,}3t^2$ (время t — в секундах, угол $\varphi(t)$ — в радианах). В какой момент он остановится?

852. При нагревании тела его температура T с течением времени изменяется по закону $T = 0{,}4t^2$, где T — температура в градусах, t — время в секундах. Найдите скорость изменения температуры в момент $t = 5$ с.

853. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = 2 + 8t - t^2$ (s —

путь в метрах, t — время в секундах). Какое расстояние прошло тело до момента, когда его скорость стала равна нулю?

854. Два тела движутся прямолинейно согласно законам $s_1(t) = t^3 + 3t^2 - 2t + 2$ и $s_2(t) = t^3 + 2t^2 + 5t - 4$ (s_1, s_2 — путь в метрах, t — время в секундах). Найдите ускорение каждого из тел в момент времени, когда они прошли одинаковый путь.

855. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = 6t - t^2$ (путь s — в метрах, время t — в секундах). Найдите:

а) мгновенную скорость тела в момент времени: $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с;

б) кинетическую энергию тела через 1,5 с после начала движения, если его масса равна 2 кг.

856. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = t^3 + 3t^2$ (путь s — в метрах, время t — в секундах). Найдите:

а) ускорение его движения в момент $t = 5$ с;

б) силу, действующую на тело через 3 с после начала движения, если его масса равна 5 г.

857. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = 6 + 4t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (путь s — в метрах, время t — в секундах). Определите кинетическую энергию тела в тот момент, когда его скорость станет наибольшей ($m = 2$ кг).

858. Тело, подброшенное вертикально вверх со скоростью $v_0 = 60$ м/с, движется по закону $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где h — путь в метрах, t — время в секундах, $g \approx 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Найдите:

а) скорость тела через 2 с после начала движения;

б) время, когда скорость тела равна нулю;

в) наибольшую высоту, которую достигнет тело.

859. Тело бросили вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. Когда и на каком расстоянии от земли оно достигнет наивысшей точки?

860. Объём продукции V мастерской, производящей ёлочные украшения, в течение дня выражается зависимостью $V(t) = \frac{5}{6}t^3 + 7\frac{1}{2}t^2 + 50t + 37$, где $t \in [1;8]$. Вычислите производительность труда мастерской в течение каждого часа работы.

Уровень В

861. Через поперечное сечение проводника в каждый момент времени t проходит заряд $q(t) = 5\sqrt{2t+5}$ (q измеряется в кулонах, а t — в секундах). Найдите силу тока в момент времени $t = 10$ с.

862. Через поперечное сечение проводника в каждый момент времени t проходит заряд $q(t) = \ln(t+1)$ (q измеряется в кулонах, а t — в секундах). В какой момент времени сила тока в проводнике равна 0,1 А?

863. Масса кристаллов в растворе изменяется по закону $m = \sqrt{t^2+5t}$, где m — масса кристаллов в граммах, t — время в часах. Найдите скорость роста массы кристаллов через 4 ч после начала кристаллизации.

864. Шарик колеблется по закону $x(t) = 2\sin 3t$. Докажите, что его ускорение пропорционально координате x. При каких значениях t ускорение шарика положительное?

865. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = \sqrt{t}$. Докажите, что его ускорение пропорционально кубу скорости.

866. Колесо вращается так, что угол его поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот оно сделало за 8 с. Найдите угловую скорость через 48 с после начала вращения.

867. Лестница длиной 5 м стояла вертикально. Потом её нижний конец начали перемещать по полу с постоянной скоростью 2 м/с (*рис. 97*). С какой скоростью в момент t опускался верхний конец лестницы?

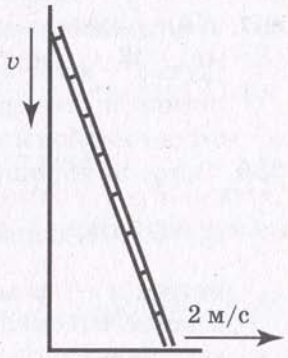


Рис. 97

Упражнения для повторения

868. Исследуйте функцию и постройте её график:
а) $y = x^2 e^x$; б) $y = (\ln x)^{-1}$.

869. Найдите среднее арифметическое всех целых чисел x таких, что:
а) $10 \le x \le 50$; б) $-10 \le x \le 50$.

870. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4. \end{cases}$

§ 23. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим, как с помощью исследования функций можно решать уравнения и неравенства.

Если известно, что непрерывная функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[a; b]$, а на его концах приобретает числовые значения разных знаков, то это означает, что на $[a; b]$ график функции пересекает ось Ox в одной точке (теорема Больцано—Коши, с. 122). Следовательно, на $[a; b]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет один корень.

Пример 1. Имеет ли уравнение $x^4 - 4x - 9 = 0$ корни на промежутке $[2; 3]$?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^4 - 4x - 9$. Её производная $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$. Критическая точка одна: $x = 1$.

Если $x > 1$, то $f'(x) > 0$, поэтому на промежутке $[1; \infty)$, а следовательно, и на $[2; 3]$, функция $f(x)$ возрастает.

$f(2) = -1$, $f(3) = 60$, т. е. на концах промежутка $[2; 3]$ значения функции $f(x)$ имеют разные знаки.

Ответ. На промежутке $[2; 3]$ данное уравнение имеет один корень.

Пример 2. Решите уравнение $x^5 + 2x^3 + x - 7 = 0$.

Решение. Исследуем функцию $f(x) = x^5 + 2x^3 + x - 7$ на монотонность. Её область определения — множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Производная $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$ положительная при всех значениях x. Следовательно, на всей области определения функция $f(x)$ возрастает, $f(0) = -7 < 0$, $f(2) > 0$. Это означает, что её график обязательно пересекает ось Ox и к тому же — только в одной точке. Вывод: данное уравнение имеет один действительный корень. Поскольку $f(1) = -3$, а $f(2) = 43$, то точка пересечения графика функции с осью Ox находится на промежутке $(1; 2)$ (*рис. 98*). Следовательно, искомый корень уравнения $x \approx 1$.

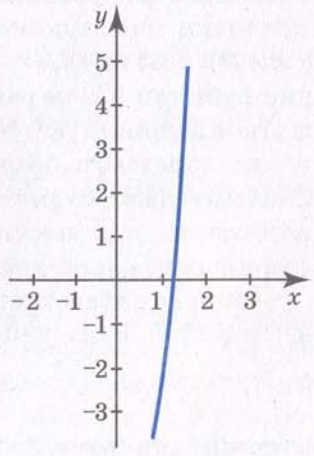


Рис. 98

Чтобы найти более точное значение корня, сужают рамки промежутка:

$f(1{,}1) = -1{,}7$, $f(1{,}2) \approx 0{,}14$.

Следовательно, $x \approx 1{,}2$.

Подобным способом приближённое значение корня можно найти с любой точностью.

Пример 3. Решите неравенство $x^5 + 2x^3 + x - 7 > 0$.

Решение. Используя рисунок 98, делаем вывод: множество решений данного неравенства — промежуток $(\alpha; \infty)$, где α — корень рассматриваемого выше уравнения. Такой ответ — приближённый. Но если, например, требуется найти целые решения данного неравенства, то ответ можно дать точный: $x \geq 2$, где $x \in N$.

Рассмотренные способы решения уравнений и неравенств основываются на таком свойстве непрерывных функций. *Если функция $f(x)$ непрерывна и не равна нулю ни в одной точке промежутка $(a; b)$, то она на этом промежутке сохраняет знак,* то есть, её значения на всём промежутке только положительные или только отрицательные. Доказательство этого свойства есть в курсе математического анализа. Мы же ограничимся только наглядным объяснением. Если график непрерывной функции на промежутке $(a; b)$ не пересекает ось Ox, то весь он на этом промежутке находится выше оси Ox или ниже неё.

На этом свойстве непрерывных функций основан и *метод интервалов,* которым удобно решать неравенства.

Пример 4. Решите неравенство

$(x - 2)(x + 3)(x + 5) < 0$.

Решение. Функция $f(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 5)$ определена на $\boldsymbol{R}$.

Её значения равны нулю в трёх точках: $x = -5$, $x = -3$ и $x = 2$. Эти точки числовую ось $\boldsymbol{R}$ разбивают на 4 промежутка: $(-\infty; -5)$, $(-5; -3)$, $(-3; 2)$, $(2; \infty)$. На каждом из этих промежутков значение функции $f(x)$ не равно 0, поэтому на каждом из этих промежутков функция $f(x)$ сохраняет знак. Какие именно знаки, нетрудно определить и устно: $f(-10) < 0$, $f(-4) > 0$, $f(0) < 0$, $f(10) > 0$. Следовательно, схематически график функции $y = f(x)$ можно изобразить, как показано на рисунке 99. Используя рисунок, сразу можно записать ответ: $(-\infty; -5) \cup (-3; 2)$.

Методом интервалов можно решать и дробно-рациональные неравенства. Ведь, например, неравенство

$$\frac{(x-2)(x+3)}{x+5} < 0$$

равносильно рассмотренному выше, поэтому имеет такое же множество решений.

Рис. 99

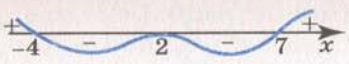


Рис. 100

Замечание. Не надо думать, что знаки непрерывной функции $f(x)$ в соседних промежутках всегда разные. Например, график функции $\varphi(x) = (x-7)(x+4)(x-2)^2$ схематически можно изобразить, как показано на рисунке 100. В смежных промежутках $(-4, 2)$ и $(2, 7)$ знаки функции одинаковы. Подобное случается, когда функция содержит чётные степени множителей или их модули. Ведь они неотрицательные и на знак функции не влияют.

Применение производной для доказательства неравенств опирается на понятие наибольшего и наименьшего значения функции на множестве или на монотонность функции.

Доказать неравенство вида $f(x) \le g(x)$ можно по следующему плану:

1) запишите функцию $h(x) = f(x) - g(x)$;

2) найдите производную $h'(x)$;

3) найдите критические точки функции $h(x)$, решив уравнение $h'(x) = 0$ и учитывая заданное множество или область определения функции $h(x)$;

4) покажите, что найденная критическая точка является точкой максимума (воспользуйтесь достаточным условием существования экстремума);

5) вычислите $h_{\max}$ и сравните с нулём;

6) сделайте вывод, воспользовавшись неравенством $h(x) \le h_{\text{наиб.}}$

Аналогично можно составить план для доказательства неравенства вида $f(x) \ge g(x)$.

Пример 5. Докажите, что для $x > 0$ выполняется неравенство $1 + 2\ln x \le x^2$.

Доказательство. В данном случае $h(x) = 1 + 2\ln x - x^2$.

Найдём производную $h'(x) = \frac{2}{x} - 2x = -\frac{2(x^2-1)}{x}$. Найдём критические точки: $\frac{2(x^2-1)}{x} = 0$, или $x^2 - 1 = 0$. Решая записанное уравнение и учитывая условие $x > 0$, получим $x = 1$. Исследуем знак производной $h'(x)$ на интервалах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$. Для $x > 1$ $h'(x) < 0$, а для $x \in (0; 1)$ $h'(x) > 0$. Следовательно, точка $x = 1$ является точкой максимума функции $h(x)$ и $h_{\max} = h(1) = 1 + \ln 1 - 1^2 = 1 - 1 = 0$. Поскольку это единственная точка экстремума на рассматриваемом множестве, то $h_{\max} = 0$ является наибольшим значением функции

на множестве $(0; +\infty)$, т. е. $h_{max} = h_{наиб}$. Поскольку $h(x) \le h_{наиб.} = 0$, то $1 + 2\ln x - x^2 \le 0$, или $1 + 2\ln x \le x^2$, что и требовалось доказать.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Как с помощью производной установить наличие действительных корней уравнения?
2. На каком свойстве непрерывних функций основывается метод интервалов для решения неравенств?
3. Как с помощью производной доказывают неравенства?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Докажите, что для $x \neq 0$ выполняется неравенство $e^x > 1 + x$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $h(x) = e^x - 1 - x$. Найдём её производную $h'(x) = e^x - 1$. Функция имеет одну критическую точку $x = 0$. Она является точкой минимума, поскольку, если $x < 0$, то $e^x - 1 < 0$, а если $x > 0$, то $e^x - 1 > 0$. Поскольку это единственная критическая точка и она является точкой минимума, то в этой точке функция принимает своё наименьшее значение. Поэтому $h_{наим.} = h(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$. Следовательно, для всех $x \neq 0$ $h(x) > h(0)$, или $e^x - 1 - x > 0$.

Следовательно, если $x \neq 0$, то $e^x > 1 + x$.

2. Сколько корней имеет уравнение $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 7 = 0$?

Решение. Исследуем функцию $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 7$ на монотонность и экстремумы.

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x(x^2 - 3x - 4) = 4x(x + 1)(x - 4)$.

Критические точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; -1)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	4 min	↗	7max	↘	−121 min	↗

Поскольку при $x \to \infty$ и $f(x) \to \infty$, то график функции $f(x)$ пересекает ось Ox один раз на промежутке $[0; 4]$ и один раз на промежутке $[4; \infty)$. Следовательно, данное уравнение имеет два действительных корня.

Выполните устно

871. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$, если $y = f(x)$ — функция, график которой изображён на рисунке 101? Назовите их.

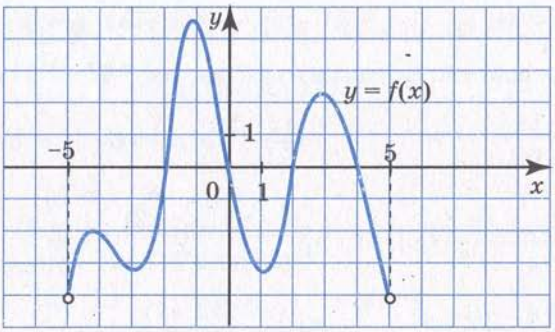


Рис. 101

872. Решите неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$, если $y = f(x)$ — функция, график которой изображён на рисунке 101.

Уровень А

Сколько корней имеет уравнение (873—874)?

873. а) $x^4 + x^3 = 10$; б) $x^3 - 3x^2 - 9x = 1$; в) $12x^4 - 12x^3 - 3x^2 = 5$.

874. а) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ на $[2; 3]$; б) $x^4 + 6x - 8 = 0$ на $[2; 5]$.

Решите неравенство методом интервалов (875—877).

875. а) $(x - 2)(x + 3)(x + 8) < 0$; б) $(x - 4)(x - 5)(x - 6) \geq 0$.

876. а) $x(x - 3)(x + 2) < 0$; б) $x(x + 4)(x^2 + 2) < 0$.

877. а) $(2x - 3)(3x - 5)(x + 6) \leq 0$; б) $(3x - 4)(2x + 3)(x - 7) \geq 0$.

Найдите с точностью до 0,1 корни уравнения (878—880).

878. а) $x^3 - 6x + 2 = 0$; б) $x^4 - x - 1 = 0$.

879. а) $x^3 + x - 3 = 0$; б) $x^4 - 2x - 2 = 0$.

880. а) $x^3 + 6x - 8 = 0$; б) $x^4 - 4x + 1 = 0$.

Уровень Б

Решите неравенство методом интервалов (881—883).

881. а) $(1 - x)^2(x + 7)(x + 3) > 0$; б) $(x + 3)(x + 1)(x - 5)^3 < 0$;
в) $x(x - 4)(x + 5)(x - 1) \leq 0$; г) $x^2(x + 3)(x - 4)(x - 6) \geq 0$.

882. а) $(x - 1)(x^2 - 2x + 3) \leq 0$; б) $(x^2 - x - 1)(x - 1{,}5) < 0$;
в) $(x - 2)(5x^2 - x - 4)^2 \geq 0$; г) $(5x^2 + 2x - 3)(x + 6)^2 \geq 0$.

883. а) $(5 - x)(x - 3)^3(x + 1) > 0$; б) $(3 - x)^3(x + 1)(x - 5) < 0$;
в) $(x - x^2)(x + 3)(x - 1) \leq 0$; г) $(x^2 - 4)(x + 3)(2x - 4) \geq 0$.

Найдите с точностью до 0,01 корни уравнения (884—886).

884. а) $x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$; б) $2x^7 + 3x^3 - 2 = 0$.

885. а) $2x^3 + 2x - 1 = 0$; б) $0{,}2x^5 - x^3 + 7x + 5 = 0$.

886. а) $3x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$; б) $2x^5 - x^2 - 7x + 5 = 0$.

Уровень В

Решите неравенство методом интервалов (887—891).

887. а) $\frac{x(x-1)(x+2)}{(x+3)(1-x)}>0$; б) $\frac{(x-2)(x-3)}{x(x^2+x+1)}>0$.

888. а) $\frac{x^2-3x+2}{x(x-2)(x+3)}\le 0$; б) $\frac{(x-2)(x-3)}{(2+x-x^2)(x+5)}\ge 0$.

889. а) $\frac{(x-3)(x+2)}{x-6}<0$; б) $\frac{(x-2)(x+7)}{x+8}\ge 1$.

890. а) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+4}<1$; б) $\frac{x^2+6x+5}{x^2-4x+4}\ge\frac{10x+1}{(x-2)^2}$.

891. а) $\frac{1}{x^2-6x+8}<\frac{1}{8}$; б) $\frac{x^2+5x+4}{2x^2+5x}\le 1$.

Найдите с точностью до 0,01 корни уравнения (892—893).

892. а) $\ln^2 x+x-2=0$; б) $x-0{,}1\sin x=2$.

893. а) $x^2=e^x+2$; б) $x^2=\sin x+e^{-x}-2$.

894. Докажите неравенство для всех $x>0$:

а) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$; б) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$; в) $x>\ln(1+x)$.

895. Решите уравнение:

а) $|x-1|+|x-3|=1$; б) $|x-1|+|x-3|=2$;

в) $|x-1|+|x-3|=4$; г) $|x-1|+|x-3|=10$.

896. Решите двойное неравенство $4<|x-1|+|x-3|\le 6$.

897. Докажите неравенство:

а) $-10\le x^5-5x^4+5x^3+1\le 2$, $x\in[-1;2]$;

б) $-1\le\sin x+\cos^2 x\le 1{,}25$;

в) $\operatorname{tg}x-8\sin x\ge -3\sqrt{3}$, $x\in(0;0{,}5\pi)$.

Упражнения для повторения

898. Сравните числа: а) $\frac{4}{9}$ и $\frac{5}{11}$; б) $\frac{5}{22}$ и $0{,}2(27)$.

899. Найдите значение функции $y=x^{\frac{3}{4}}$ в точке x_0, если:

а) $x_0=1$; б) $x_0=16$; в) 81; г) 625.

900. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha$.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ КОНТРОЛЮ

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(x+2\sqrt{x}\right)$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

2. Найдите k, если прямая $y = kx + 3$ образует с положительным направлением оси Ox угол 135°.

а) 1; б) -1; в) 3; г) -3.

3. Производной функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ является функция:

а) $y' = 3\sqrt[2]{x^3}$; б) $y' = \sqrt[3]{x}$; в) $y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$; г) $y' = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^{-1}}$.

4. Найдите область значений функции $y = 3x^2 - 6x + 7$.

а) R; б) $[3;7]$; в) $(-\infty; 4]$; г) $[4; \infty)$.

5. Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - t$, где s измеряется в метрах, а t — в секундах. Вычислите её скорость, если $t = 1$ с.

а) 3 м/с; б) 4 м/с; в) 5 м/с; г) 6 м/с.

6. Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $f(x) = 1 - \ln(2x^2 - 1)$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$ и положительным направлением оси Ox.

а) -1; б) 2; в) 4; г) -4.

7. Сколько критических точек имеет функция $y = x^5 - 5x^3$ на промежутке $(0; 3)$:

а) одну; б) две; в) три; г) ни одной?

8. Отрезок длиной 12 см разделили на две части так, чтобы сумма площадей квадратов, построенных на этих отрезках как на сторонах, была наименьшей. Найдите сумму площадей этих квадратов.

а) 100; б) 40; в) 72; г) 80.

9. Вычислите значение производной функции $f(x) = 3\cos x - 2\sin x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

а) -3; б) -2; в) -5; г) 1.

10. Сумма наибольшего и наименьшего значений функции $y = x^2$ на промежутке $[-5; 2]$ равна:

а) -3; б) 29; в) 25; г) 4.

A+B=? ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x)=2e^x+3x^3$; $x_0=0$; б) $f(x)=\sin 4x\cos 4x$, $x_0=\frac{\pi}{24}$;

в) $f(x)=\frac{x^3-27}{x^2+3x+9}$, $x_0=2011$; г) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x_0=1$.

2. Найдите критические точки функции:

а) $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+1$; б) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке:

а) $y=3x^4+4x^3+1$, $x\in[-2;1]$; б) $y=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$, $x\in[1;6]$.

4. Найдите экстремумы функции и определите их характер:

а) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x-8$; б) $y=x-2\sqrt{x-2}$.

5. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y=\frac{3x-1}{3x+1}$; б) $y=\sqrt{x^2-6x+8}$.

6. Найдите производную функции:

а) $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+6}}$; б) $y=\frac{\sqrt{\operatorname{tg}x}}{x^2+1}$.

7. Найдите площадь треугольника, который отсекает от осей координат касательная, проведённая к графику функции $y=\ln x$ в точке $x_0=e^{-1}$.

8. Забором длиной 24 м нужно огородить с трёх сторон прямоугольный цветник наибольшей площади. Найдите размеры цветника.

9. Исследуйте функцию на монотонность:

$$y=\begin{cases}-3x^5+5x^4+1, & x\geq -1;\\ \frac{4}{x}, & x<-1.\end{cases}$$

10. При каких значениях параметра a функция $y=ax^3-3x^2$ в точке $x=1$ имеет минимум?

Исторические сведения

Математический анализ — область математики, в которой на основе анализа бесконечно малых исследуются самые разнообразные функции, в частности и те, которые описывают процессы и явления природы и общества. По этому поводу Ж. Фурье писал, что математический анализ столь же широкий, как и сама природа.

Первыми и основными составляющими математического анализа является дифференциальное и интегральное исчисления. Традиционно изучение математического анализа начинается с рассмотрения основ дифференциального исчисления. Интегральное исчисление изучается позже. Исторически развитие этих разделов математического анализа происходило в обратном направлении. В работах математиков древнего мира сначала большее внимание уделялось интегральному исчислению — вычислению площадей и объёмов (см. с. 265).

Следует заметить, что и само дифференциальное исчисление развивалось не в той последовательности, как вы его изучали. Сначала учёные научились вычислять производные многих функций и с их помощью решали важные прикладные задачи. Позже начали уточнять, что такое производная. Только в 1823 году французский математик Огюстен Луи Коши (1789—1857) сформулировал строгое определение предела и непрерывности функции.

Производная в математику вошла почти одновременно с понятием функции, хотя материал, который подводил к этим понятиям, накапливался на протяжении многих веков. Ещё Архимед решал задачи, которые теперь решают с помощью производной: исследовал, как построить касательную к спирали, как найти наибольшее значение произведения $x^2(a - x)$ и т. д.

Производную произвольного многочлена от одной переменной умел находить П. Ферма.

ФЕРМА Пьер (1601—1665)

Выдающийся французский математик. Юрист, советник парламента. Математикой занимался в свободное от работы время. Создатель теории чисел, один из основоположников аналитической геометрии, дифференциального исчисления и теории вероятностей.

«Ферма сделал больше для развития теории чисел, чем любой другой учёный в течение более тысячи лет».

Д. Смит

НЬЮТОН Исаак (1643—1727)

Выдающийся английский физик, астроном, математик. Возглавлял Королевское общество (Академию наук), был членом парламента и директором Монетного двора. Имел титул рыцаря. Сформулировал основные законы механики, закон всемирного тяготения. Независимо от Лейбница заложил основы математического анализа.

«При изучении наук примеры полезнее правил».
И. Ньютон

Он показал, как решать экстремальные задачи, в том числе — о вписывании в данный шар конуса наибольшего объёма, цилиндра наибольшей площади поверхности и т. д. Но самого понятия производной он не ввёл.

К понятию производной пришли почти одновременно и различными путями И. Ньютон и Г. Лейбниц. И. Ньютон исходил из потребностей физики, рассматривал физический смысл производной. Функцию он называл флюентой (лат. fluere — течь), а производную — флюксией, функции обозначал буквами u, x, y, z, а их производные — теми же буквами с точками сверху: $\dot{u}$, $\dot{x}$ и т. д.

И. Ньютон ввёл понятие флюксии в 1665 г., намного раньше, чем Г. Лейбниц — понятие дифференциала, но Лейбниц опубликовал свои работы раньше, в 1684 г. К тому же они шли разными путями, независимо друг от друга. Поэтому их обоих считают основоположниками дифференциального исчисления.

Г. Лейбниц рассматривал геометрический смысл производной: находил угловой коэффициент касательной к графику функции. При этом он пользовался не производной, а *дифференциалом* и отношением дифференциалов. Вместо известных вам символов Δx, Δy он писал dx и dy. Здесь d — первая буква латинского слова

ЛЕЙБНИЦ Готфрид Вильгельм (1646—1716)

Выдающийся немецкий учёный. По образованию юрист, работал библиотекарем, историографом, организовал Берлинскую академию наук, исследовал проблемы политической экономии, языкознания, химии, геологии. Основоположник символической логики, один из создателей математического анализа.

«После Лейбница, пожалуй, уже не было человека, который полностью охватывал бы всю интеллектуальную жизнь своего времени».
Н. Винер

differentia — разность, ведь приращение аргумента и приращение функции — разности их значений. Отсюда и пошло название «дифференциальное исчисление». Понятие дифференциала и символы dx, $\frac{dy}{dx}$ широко используются в современной математике.

Ввёл термины: «функция», «абсцисса», «ордината», логическую символику, знаки умножения и деления (точку и двоеточие) и др.

Их исследования успешно продолжили И. Бернулли, А. Лопиталь, Л. Эйлер, Б. Тейлор, Ж. Лагранж и др. Не все их рассуждения были строгие, некоторые даже содержали ошибки, потому что в то время не были разработаны логические основы математического анализа.

ГЛАВНОЕ В РАЗДЕЛЕ 2

Число A называют *пределом числовой последовательности* y_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер члена последовательности $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|y_n - A| < \varepsilon$.

Если числовая последовательность y_n имеет предел, то она называется *сходящейся*. Если числовая последовательность предела не имеет, то она называется *расходящейся*.

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что для всех значений x из промежутка $(a - \delta; a + \delta)$, кроме, возможно, самой точки $x = a$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет предел в точке x_0, то в этой точке существуют пределы функций $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $k f(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ и имеют место равенства:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Сформулированные свойства правильны также для пределов последовательностей и для предела на бесконечности.

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ — *первый замечательный предел.*

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в точке x_0,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной на промежутке*, если она непрерывна в каждой его точке.

Точка, в которой функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва функции*, а сама функция в этой точке называется *разрывной*.

Теорема (*Больцано—Коши*). Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то на интервале $(a;\ b)$ обязательно существует точка c, такая что $f(c)=0$.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называют предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю, а предел существует,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Правила и формулы дифференцирования

$C'=0$, $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$, $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$(Cu)'=Cu'$, $(\sin x)'=\cos x$, $(e^x)'=e^x$,

$(u+v)'=u'+v'$, $(\cos x)'=-\sin x$, $(a^x)'=a^x\ln a$,

$(uv)'=u'v+uv'$, $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

Если $y=f(u)$, где $u=h(x)$, то $y'=y'_u u'$.

$f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha$ — геометрический смысл производной.

$v(t) = s'(t)$; $a(t) = v'(t)$ — механический смысл производной.

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Если производная функции в каждой точке некоторого промежутка положительная, то функция на этом промежутке возрастает.

Если производная функции в каждой точке промежутка отрицательная, то функция на этом промежутке убывает.

Если производная в каждой точке промежутка тождественно равна нулю, то на этом промежутке функция постоянная.

Внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна нулю или не существует, называют *критическими точками функции.*

Критическая точка x_0, при переходе через которую в направлении роста аргумента производная меняет знак с «плюса» на «минус», является *точкой максимума,* а точка, при переходе через которую производная меняет знак с «минуса» на «плюс» — *точкой минимума.*

Точки минимума и максимума функции называют *точками экстремума,* а значения функции в этих точках — *экстремумами.*

Если вторая производная дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ отрицательная ($f''(x) < 0$) на интервале $(a; b)$, то кривая $y = f(x)$ выпуклая на данном интервале, если вторая производная положительная ($f''(x) > 0$), то кривая вогнутая на $(a; b)$.

Если при переходе через точку x_0 производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба кривой $y = f(x)$.

Прямая l называется *асимптотой кривой* $y = f(x)$, если расстояние d от точки M $(x; f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки M в бесконечность.

Прямая $x = a$ — *вертикальная асимптота* кривой $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ либо не существует предела в точке $x = a$.

Если существует конечный предел $b = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, то прямая $y = b$ — *горизонтальная асимптота* кривой $y = f(x)$.

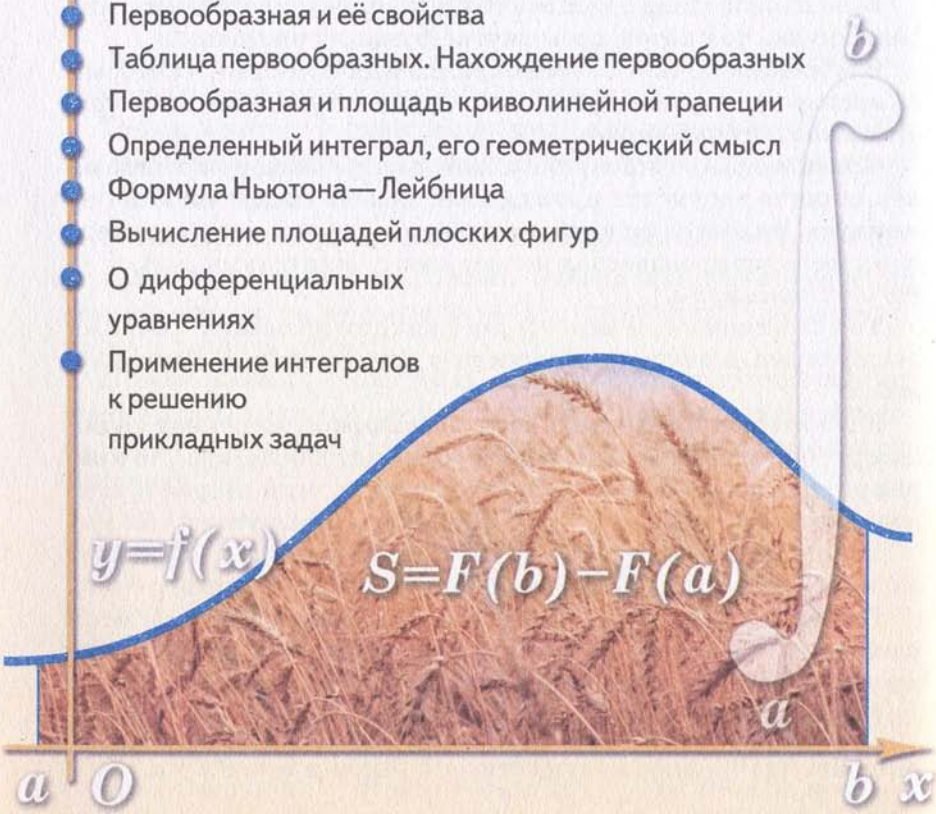
Уравнение *наклонной асимптоты*: $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$. Если оба записанные пределы существуют, то существует наклонная асимптота.

Раздел 3

ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Основные темы раздела

- Первообразная и её свойства
- Таблица первообразных. Нахождение первообразных
- Первообразная и площадь криволинейной трапеции
- Определенный интеграл, его геометрический смысл
- Формула Ньютона—Лейбница
- Вычисление площадей плоских фигур
- О дифференциальных уравнениях
- Применение интегралов к решению прикладных задач



Открытие анализа бесконечно малых, т.е. исчисления дифференциального и интегрального — в действительности одно из величайших изобретений, которое когда-либо смог осуществить гений человеческого духа.

В. Левицкий

В этом разделе вы ознакомитесь с новой операцией — интегрированием, которая является обратной дифференцированию. Введение интегрирования и дифференцирования и установление их взаимосвязи стало величайшим открытием человечества в XVII веке. Изучив материал этого раздела, вы получите удобный метод решения важных задач.

§ 24. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Ранее вы ознакомились с операцией дифференцирования: нахождения производной по данной функции. Не менее важна и обратная ей операция — интегрирование: нахождение функции по её производной.

Пусть дано функцию $F(x)$ такую, что в каждой точке x некоторого промежутка I $F'(x) = f(x)$. В этом случае функцию $f(x)$ называют производной функции $F(x)$, а $F(x)$ — первообразной для $f(x)$.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке I, если для каждого значения x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Например, на всей числовой оси (т. е. на $\boldsymbol{R}$) функция $F(x) = x^2$ является первообразной для $f(x) = 2x$, ибо $(x^2)' = 2x$; $F(x) = \sin x$ есть первообразной для $f(x) = \cos x$, ибо $(\sin x)' = \cos x$.

Функция $F(x) = x^{-1}$ является первообразной для $f(x) = -x^{-2}$, например на $[1; 5]$. Но не на $\boldsymbol{R}$, поскольку $F'(0)$ не существует, и не на $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, поскольку это не промежуток.

Одна ли функция $F(x) = x^2$ является первообразной для $f(x) = 2x$? Нет. Ведь и $(x^2 + 3)' = 2x$ и $(x^2 - 7)' = 2x$ и т. д. Каким бы ни было число C (произвольная постоянная), функция $F(x) = x^2 + C$ — первообразная для $f(x) = 2x$, ибо $(x^2 + C)' = 2x$.

Существуют ли другие функции, отличные от $F(x) = x^2 + C$, первообразные для $f(x) = 2x$? Нет.

Т е о р е м а. (*Основное свойство первообразных.*) **Каждая первообразная для функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из этих первообразных, а C — произвольная постоянная.**

Д о к а з а т е л ь с т в о **1.** Пусть $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I, т. е. для каждого $x \in I$: $F'(x) = f(x)$.

По правилу нахождения производной суммы

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Этим доказано, что какая бы ни была постоянная C, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то и $F(x) + C$ — первообразная для $f(x)$.

2. Пусть $\Phi(x)$ и $F(x)$ — две любые первообразные для функции

$f(x)$ на промежутке I, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$ и $F'(x) = f(x)$ для каждого $x \in I$. Тогда

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Как видим, функция $\Phi(x) - F(x)$ такая, что в каждой точке $x \in I$ её производная равна 0. Такое свойство имеет только определённая на I функция, которая ни возрастает, ни убывает на этом промежутке. Ведь если бы на некоторой части промежутка I эта функция возрастала или убывала, то там её производная была бы соответственно положительная или отрицательная. (Подробнее обоснование этого факта даётся в строгих курсах математического анализа.) Итак, $\Phi(x) - F(x) = C$, где C — постоянная, т. е. $\Phi(x) = F(x) + C$.

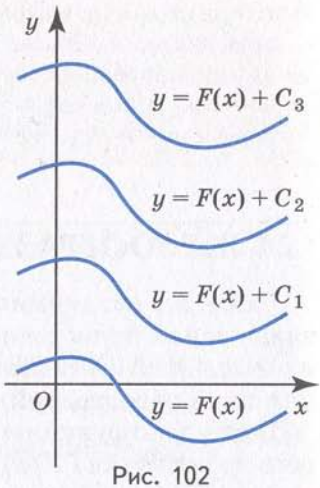


Рис. 102

Этим доказано, что если $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, то каждая из функций $F(x) + C$ также её первообразная и других первообразных для $f(x)$ не существует. Геометрически это означает, что *графики любых двух первообразных для функции $f(x)$ такие, что их можно совместить параллельным переносом вдоль оси ординат (рис. 102).*

$F(x) + C$ — *общий вид первообразных* для функции $f(x)$.

Каждая первообразная рассматривается на некотором промежутке. Если же для краткости его не указывают, то имеют в виду промежуток максимально возможной длины. В частности, если функция $f(x)$ определена на $\boldsymbol{R}$ и промежуток не указано, то речь идет о её первообразной $F(x)$ также на $\boldsymbol{R}$.

Операцию нахождения производной данной функции называют *дифференцированием*. Обратная ей операция — нахождение первообразной — называется *интегрированием*.

Используя формулы дифференцирования (с. 218), составим таблицу первообразных. Советуем запомнить её.

Данная функция	k (постоянная)	x^n $(n \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	e^x
Её первообразная	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\ln \lvert x \rvert + C$	$2\sqrt{x} + C$	$e^x + C$

Данная функция	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	a^x
Её первообразная	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Обосновать эту таблицу можно дифференцированием функции из её второй строки. Пользуясь таблицей, можно сразу писать, что, например, для функции $f(x) = x^8$ первообразной есть $F(x) = \frac{1}{9}x^9 + C$ и т. д.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ часто называют *неопределённым интегралом* этой функции и обозначают символом $\int f(x)dx$ (читают: интеграл эф от икс де икс). Выражение «проинтегрировать функцию $f(x)$» обозначает то же, что и «найти первообразную для функции $f(x)$».

То есть, если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, а C — произвольное число, то $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Слово *интеграл* в переводе с латинского языка означает целый. Почему его так назвали, вы поймёте, когда ознакомитесь с определённым интегралом (см. с. 241). Неопределённым его называют потому, что он при заданной функции и данном значении x имеет не одно числовое значение, а бесконечно много.

Таблицу первообразных, с помощью символа неопределённого интеграла можно записать так:

I. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$.

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

III. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

III′. $\int e^x dx = e^x + C$.

IV. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

V. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

VI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

VII. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Сформулируйте определение первообразной.
2. Сформулируйте теорему об основном свойстве первообразной.
3. Зная, что $(x^2)' = 2x$, скажите, чему равна первообразная функции $y = 2x$. Назовите три различные первообразные функции $y = 2x$.
4. Что такое дифференцирование?
5. Как называют операцию, обратную дифференцированию?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Докажите, что функция $F(x) = 2\sin x + 3x$ является первообразной для функции $f(x) = 2\cos x + 3$.

Доказательство. $F'(x) = (2\sin x + 3x)' = 2\cos x + 3 = f(x)$. Имеем: $F'(x) = f(x)$. Итак, по определению, функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$.

2. Найдите первообразную для функции: а) $y = x^5$; б) $y = 3^x$.

Решение. Воспользуемся таблицей первообразных.

а) Первообразной для функции x^n $(n \neq -1)$ есть функция $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Для функции $y = x^5$ $n = 5$, поэтому $F(x) = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$.

б) Первообразной для функции $y = a^x$ есть функция $\frac{a^x}{\ln a} + C$.

Для функции $y = 3^x$ $a = 3$, поэтому $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

3. Найдите для функции $y = x$ такую первообразную, чтобы её график проходил через точку $P\,(2; 5)$.

Решение. Пользуясь таблицей, найдём общий вид первообразных: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$. Поскольку график искомой первообразной проходит через точку $P\,(2; 5)$, то $5 = \frac{1}{2} \cdot 4 + C$, отсюда $C = 3$.

Следовательно, $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

Ответ. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

4. Проинтегрируйте функцию $y = \sqrt[4]{x}$.

Решение. $\int \sqrt[4]{x}dx = \int x^{\frac{1}{4}}dx = \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4x\sqrt[4]{x}}{5} + C$.

Выполните устно

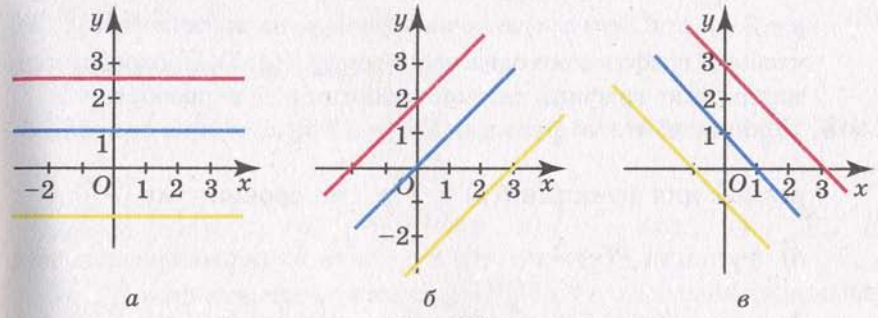
Найдите одну из первообразных для функции (**901—903**).

901. а) $f(x) = x^9$; б) $f(x) = x$; в) $f(x) = x^3$; г) $f(x) = x^{0,5}$.

902. а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = 0$; в) $f(x) = 5$; г) $f(x) = \cos x$.

903. а) $f(x) = 0,5^x$; б) $f(x) = e^x$; в) $f(x) = x^{-2}$; г) $f(x) = -0,1$.

904. На каком из рисунков изображены графики трёх первообразных для функции $y = 1$ (*рис. 103*)?



а *б* *в*

Рис. 103

905. Какое из утверждений правильное: графики двух разных первообразных одной функции совпадают; графики двух разных первообразных одной функции пересекаются; графики двух разных первообразных одной функции совмещаются параллельным переносом?

906. Для какой функции производная является одновременно и первообразной?

Уровень А

Найдите одну из первообразных для функции (**907—909**).

907. а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = 25$; в) $f(x) = x^{100}$; г) $f(x) = -3$.

908. а) $f(x) = 5^x$; б) $f(x) = 10^x$; в) $f(x) = x^{-1}$; г) $f(x) = \pi$.

909. а) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$; б) $y = \frac{1}{\sin^2 x}$; в) $y = \frac{1}{x^3}$; г) $y = \frac{1}{x^{10}}$.

910. Докажите, что функция $F(x) = x^4$ — первообразная для функции $f(x) = 4x^3$.

911. Найдите четыре произвольные первообразные для функции $f(x) = 4x^3$. Найдите такую первообразную, график которой проходит через точку $A(0; 3)$.

912. Докажите, что функция $F(x) = 0{,}5x^2 + x$ — первообразная для функции $f(x) = x + 1$.

913. Напишите общий вид первообразных для функции $f(x) = x + 1$.

914. Докажите, что функция $F(x) = \cos x$ — первообразная для функции $f(x) = -\sin x$. Найдите такую первообразную, график которой проходит через точку $A(0; 3)$.

Уровень Б

915. Докажите, что функция $F(x) = 2\sqrt{x}$ — одна из первообразных для функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на промежутке $(0; \infty)$. Для функции $y = 2\sqrt{x}$ найдите такую первообразную на промежутке $[1, 5]$, чтобы её график проходил через точку $K(4; 7)$. Постройте схематические графики данной функции и её первообразной.

916. Докажите, что: а) функция $F(x) = 1 + \operatorname{tg} x$ — одна из первообразных для функции $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) функция $F(x) = x + \operatorname{ctg} x$ — одна из первообразных для функции $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ на промежутках $(\pi n; \pi(n + 1))$, где n — целое число.

917. Докажите, что: а) функция $y = 2x^4 + x$ является первообразной для функции $y = 8x^3 + 1$; б) функция $y = e^x + ex$ является первообразной для функции $y = e^x + e$.

918. Является ли функция $F(x) = \dfrac{1}{x}$ первообразной для $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ на промежутке: а) $(0; \infty)$; б) $(-\infty; 0)$; в) $[-3; 3]$?

919. Правильно ли, что функция $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, если:

а) $F(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$, $f(x) = 2\left(x - \dfrac{1}{x^2} + C\right)$, $x \in (0; \infty)$;

б) $F(x) = 3 - x^4$, $f(x) = 3x - 0{,}2x^5 + C$, $x \in \boldsymbol{R}$;

в) $F(x) = \dfrac{1}{x^2} + 7$, $f(x) = -\dfrac{1}{2x^3}$, $x \in (-\infty; 0)$?

920. Докажите, что функция $y = 1 - 2\cos x$ является первообразной для функции $y = 2\sin x$. Постройте в одной системе координат графики двух других первообразных для функции $y = 2\sin x$. Найдите такую первообразную, график которой проходит через точку $M(0{,}5\pi; 5)$.

921. Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, если:

а) $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + 5 + \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2}$, $x \in (0; \infty)$;

б) $F(x) = 2\sin 3x$, $f(x) = 6\cos 3x$, $x \in \boldsymbol{R}$;

в) $F(x) = 4 + \operatorname{tg} 3x$, $f(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$.

Уровень В

Найдите интеграл (**922—923**).

922. а) $\int x^{-7,5}dx$; б) $\int \sqrt[5]{x^{32}}dx$; в) $\int x\sqrt[5]{x^4}dx$; г) $\int x^{\alpha+4}dx$.

923. а) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^2 dx$; в) $\int \frac{x}{x^{-2,5}}dx$; г) $\int \frac{1}{x^{\alpha-3}}dx$.

924. Докажите, что функция $y = 0{,}75x\sqrt[3]{x}$ является первообразной для функции $y = \sqrt[3]{x}$. Постройте в одной системе координат графики функций $y = 0{,}75x\sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$. Докажите, что любая первообразная нечётной непрерывной функции, определённой на $(-a; a)$, является чётной функцией.

925. Найдите для функции $y = -5x^4$ первообразную, график которой проходит через точку: а) $A(1; 3)$; б) $B(2; -5)$; в) $P(-1; 3)$. Докажите, что чётная непрерывная функция, определённая на $(-a; a)$, имеет хотя бы одну нечётную первообразную.

926. Определите функцию $f(x)$, если графиком ее первообразной являются: а) прямая, проходящая через точки $O(0; 0)$ и $A(1; 2)$; б) парабола, изображённая на рисунке 104.

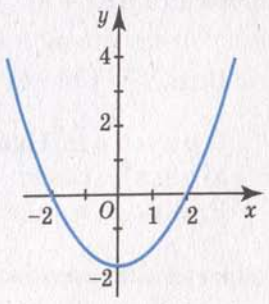


Рис. 104

927. Для функции $g(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M. Постройте график этой первообразной:

а) $g(x)=\begin{cases}\cos x, \text{ если } x>0,\\ 1, \text{ если } x\le 0,\end{cases}$ $M(0;0)$;

б) $g(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\ge 1,\\ x^{-0,5}, \text{ если } x<1,\end{cases}$ $M(1;0)$.

Упражнения для повторения

928. Найдите экстремумы функции $y=1-\sin x$.

929. Найдите точки пересечения графиков функций:

а) $y=x^2+3$ и $y=4x$; б) $y=\sqrt{x}$ и $y=0{,}5x-4$.

930. Вычислите:

а) $4^{0,5+\log_4 3}$; б) $10^{0,5\lg 49}$; в) $0{,}5^{-1+\log_4 9}$.

§25. НАХОЖДЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНЫХ

Выведем несколько правил, подобных правилам дифференцирования, которые облегчают нахождение первообразных.

I. Если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ — первообразная для функции $f(x)+g(x)$.

Действительно, если $F'(x)=f(x)$ и $G'(x)=g(x)$, то

$$(F(x)+G(x))'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x).$$

II. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, а k — произвольное число, то $kF(x)$ — первообразная для функции $kf(x)$.

Ведь $(kF(x))'=kF'(x)=kf(x)$.

III. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, а k, b — произвольные числа ($k\ne 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$.

Ведь $\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)'=\frac{1}{k}\cdot F'(kx+b)=\frac{1}{k}\cdot kf(kx+b)=f(kx+b)$.

Примеры. Найдите первообразную для функции:

а) $y=x^4+\cos x$; б) $y=5\sin x$; в) $y=(7x+2)^3$.

Решение. а) Для функций $f_1(x)=x^4$ и $f_2(x)=\cos x$ первообразными являются соответственно $F_1(x)=\frac{x^5}{5}$ и $F_2(x)=\sin x$. Поэтому для суммы данных функций общий вид первообразных

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \sin x + C.$$

б) По правилу II: $F(x) = -5\cos x + C$.

в) Одной из первообразных для функции $f(x) = (7x + 2)^3$, согласно правилу III, является функция $F(x) = \frac{1}{7} \cdot \frac{(7x+2)^4}{4}$. Общий вид первообразных для данной функции

$$F(x) = \frac{1}{28}(7x + 2)^4 + C.$$

К нахождению первообразных сводятся прежде всего задачи, обратные тем, которые решаются с помощью производной. Рассмотрим пример.

Если известен закон прямолинейного движения тела $s = s(t)$, то для нахождения его скорости в момент t нужно найти производную: $v(t) = s'(t)$. Здесь дан закон движения и требуется найти его скорость. Для механики не менее важно уметь решать обратную задачу: по заданной в каждый момент скорости определять закон движения.

З а д а ч а. Точка движется прямолинейно с переменной скоростью $v = 10t$ м/с. За перые 4 с она прошла 80 м. Найдите закон движения точки.

Р е ш е н и е. Искомый закон движения выражается такой функцией $s = s(t)$, что $s'(t) = 10t$. Здесь $s(t)$ — первообразная для функции $v = 10t$. Общий вид всех таких первообразных $s(t) = 5t^2 + C$. Поскольку за 4 с точка прошла 80 м, то $80 = 5 \cdot 16 + C$, отсюда $C = 0$.

О т в е т. Искомый закон движения точки $s(t) = 5t^2$, где t — время в секундах, $s(t)$ — расстояние в метрах.

Примеры других применений первообразной рассмотрим в следующих параграфах.

С помощью неопределённого интеграла правила интегрирования записываются так:

1. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

3. $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$, где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, $k \neq 0$.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Чему равна первообразная для функции $kf(x)$?
2. Чему равна первообразная для суммы двух функций? А для разности?
3. Сформулируйте правила интегрирования.
4. Чему равна первообразная для функции $f(kx + b)$?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите одну из первообразных для функции:

а) $y = (1 - 5x)^3$; б) $y = 2 + \operatorname{tg}^2 3x$.

Р е ш е н и е. а) Для функции $y = x^3$ одной из первообразных есть функция $y = \frac{x^4}{4}$. Учитывая то, что первообразной для функции $y = f(kx + b)$ есть функция $\frac{1}{k} F(kx + b)$, запишем искомую первообразную: $F(x) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{(1-5x)^4}{4} = -\frac{(1-5x)^4}{20}$;

б) преобразуем сначала формулу, задающую функцию:

$y = 2 + \operatorname{tg}^2 3x = 1 + 1 + \operatorname{tg}^2 3x = 1 + \frac{1}{\cos^2 3x}$. Тогда $F(x) = x + \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x$.

2. Тело движется прямолинейно с ускорением $a(t) = 2$ м/с^2. Определите скорость данного движения как функцию от времени t, если в момент $t = 0$ она равнялась 3 м/с.

Р е ш е н и е. Ускорение — производная скорости. Поэтому если $v(t)$ — искомая скорость, то $v'(t) = 2$. Следовательно, $v(t)$ — первообразная для функции $a(t) = 2$, поэтому $v(t) = 2t + C$. Поскольку $v(0) = 3$, то $3 = 2 \cdot 0 + C$, $C = 3$.

О т в е т. $v(t) = 2t + 3$.

Выполните устно

931. Найдите одну из первообразных для функции:

а) $y = 1 + x^9$; б) $y = 5 - x$; в) $y = 2x^3$; г) $y = -0{,}5x^5$.

Уровень А

Найдите одну из первообразных для функции (**932—933**).

932. а) $y = 2\sin x$; б) $y = \sin 3x$; в) $y = \cos 7x$; г) $y = 5 + \cos x$.

933. а) $y = 0{,}5^{2x}$; б) $y = e^{-x}$; в) $y = (3x)^{-2}$; г) $y = 5 + x^{-1}$.

Найдите общий вид первообразных для функции (934—936).

934. а) $f(x) = 3 + x$; б) $f(x) = x^3 + 2x$;
в) $f(x) = 3x^2 + 5x$; г) $f(x) = 4x^3 - 3^x$.

935. а) $f(x) = -5x^4 + 5^x$; б) $f(x) = -2x + \sin x$;
в) $f(x) = x^3 + e^x$; г) $f(x) = x^5 - 2\cos x$.

936. а) $f(x) = x^3 + 2x - 1$; б) $f(x) = x^6 - 4x + 3$;
в) $f(x) = 2 + \cos 3x$; г) $f(x) = 3 - \sin 5x$.

937. Для какой функции первообразной есть функция:
а) $y = 3x^5$; б) $y = 2\cos x$?

938. Для функции $f(x)$ найдите такую первообразную, чтобы её график проходил через заданную точку P, если:

а) $f(x) = 1 + x^2$, $P(-3; 9)$; б) $f(x) = x + \frac{1}{\cos^2 x}$, $P(0; -3)$.

939. Для функции $f(x)$ найдите такую первообразную $F(x)$, что:

а) $f(x) = x^3$, $F(-1) = 2$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F(2) = 3$;

в) $f(x) = \sin x$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $F(4) = 2$.

Уровень Б

940. Тело движется прямолинейно с ускорением $a(t)$, причём в момент времени t_0 скорость тела равна v_0. Найдите зависимость пути, пройденного телом, от времени, если:
а) $a(t) = 8t$, $t_0 = 5$ с, $v_0 = 120$ м/с;
б) $a(t) = 8$, $t_0 = 3$ с, $v_0 = 30$ м/с.

941. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)$, причём в момент времени t_0 пройденный путь равен s_0. Найдите зависимость пути, пройденного телом, от времени, если:
а) $v(t) = 3t^2$, $t_0 = 2$ с, $s_0 = 12$ м;
б) $v(t) = 2\sin t$, $t_0 = \pi$ с, $s_0 = 2$ м.

Найдите общий вид первообразных для функции (942—946).

942. а) $f(x) = 8e^x + x$; б) $f(x) = e^{2-3x} - 3x$; в) $f(x) = e^{2x} - \sqrt{2x}$.

943. а) $f(x) = 3 \cdot 2^x + 3$; б) $f(x) = 3^{-5x} + \sqrt{x}$; в) $f(x) = e^{3x} + 3x^e$.

944. а) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ на $(0; \infty)$; б) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ на $(-\infty; 0)$;

в) $f(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$ на $(0; \infty)$; г) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{3}$ на $(-\infty; 0)$.

945. а) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$ на $(0;\infty)$; б) $f(x)=-\sqrt{\frac{3}{x}}$ на $(0;\infty)$;

в) $f(x)=\frac{2,7}{\cos^2 x}$ на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; г) $f(x)=-\frac{0,5}{\sin^2 x}$ на $(0;\pi)$.

946. а) $f(x)=\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}$ на $[-1;1]$;

б) $f(x)=\cos x-\frac{1}{\sin^2 x}$ на $(0;3]$.

Найдите общий вид первообразных для функции (**947—948**).

947. а) $y=5\sin 7x\cos 7x$; б) $y=2\sin^2 x-3$;

в) $y=\sin^2 5x-\cos^2 5x$; г) $y=3x-\operatorname{ctg}^2 3x$.

948. а) $y=\sin 2x\cos 13x-\cos 2x\sin 13x$; б) $y=x+\operatorname{tg}^2 3x$;

в) $y=\cos 3x\cos 7x+\sin 3x\sin 7x$; г) $y=2-2\sin^2 x$.

Уровень В

Для заданной функции найдите ту первообразную, график которой проходит через точку A (**949—950**).

949. а) $y=(x+2)(3x-1)$, $A(0;4)$; б) $y=(x-1)(x^2+x+1)$, $A(2;7)$;

в) $y=\frac{x+1}{x-1}$, $A(2;5)$; г) $y=\frac{5}{1+\cos 4x}$, $A\left(\frac{\pi}{6};0\right)$.

950. а) $y=x+3\sqrt{x}$, $A(4;0)$; б) $y=(1-\sqrt{x})(4\sqrt{x}+1)$, $A(1;1)$;

в) $y=\frac{x}{x+4}$, $A(-3;2)$; г) $y=\frac{4}{1-\cos x}$, $A\left(\frac{\pi}{3};0\right)$.

Найдите интеграл и результат проверьте дифференцированием (**951—952**).

951. а) $\int\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{x^3+1}{x+1}dx$; в) $\int\frac{2}{\sin^2 2x}dx$;

г) $\int\frac{9^x-3^x-12}{3+3^x}dx$; д) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$; е) $\int\frac{10^{x-1}-8^x}{2^x}dx$.

952. а) $\int 2^{2x}\cdot e^x dx$; б) $\int\frac{5x+3}{25x^2+30x+9}dx$; в) $\int\frac{1-4x}{\sqrt{4x-1}}dx$;

г) $\int\frac{\pi^x-1}{\pi^x-\pi^{2x}}dx$; д) $\int\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)^2 dx$; е) $\int\frac{\cos^4 x}{0,25}dx$.

953. Найдите функцию, если угловой коэффициент касательной к её графику в каждой точке x задаётся формулой $k = -x^2$. Постройте график такой функции и её касательной, проведённой в точке $A\left(-1; \frac{2}{3}\right)$.

954. Задайте функцию, график которой проходит через точку (0, 3), если угловой коэффициент касательной к этому графику в каждой точке x задаётся формулой $k = 1 + e^{2x}$.

955. Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна $v(t) = t^2 + 2t - 1$ (м/с). Найдите длину пути, пройденного точкой за время от 1 с до 4 с.

956. Скорость точки изменяется по закону $v(t) = 9{,}8t - 0{,}005t^2$ (м/с). Найдите путь, пройденный в течение первых 5 с и ускорение в момент времени $t = 5$ с.

957. Тело движется прямолинейно с ускорением $a(t)$, причём в момент t_0 (с) координата и скорость тела равнялись соответственно x_0 (м) и v_0 (м/с). Определите закон движения, если:
а) $a(t) = 6t$, $t_0 = 0$, $x_0 = 3$, $v_0 = 1$;
б) $a(t) = -2t$, $t_0 = 1$, $x_0 = 4$, $v_0 = 2$;
в) $a(t) = \cos t$, $t_0 = \pi$, $x_0 = 1$, $v_0 = 0$.

Упражнения для повторения

958. Найдите производную функции:
а) $y = \log_5(2x + 3)$; б) $y = \sqrt{1 - x}$; в) $y = \sin(5 - 2x)$.

959. Запишите уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:
а) $y = 2x^2 + 3$, $x_0 = 1$; б) $y = 2^x + 3$, $x_0 = 1$.

960. В первом баке содержится 400 л бензина, а во втором — 900 л. Ежечасно из первого бака выливают по 20 л бензина, а со второго — по 10 л. Через сколько часов в первом баке останется бензина в 4 раза меньше, чем во втором?

§ 26. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ

Пусть на координатной плоскости задан график непрерывной функции $y = f(x)$, принимающей на промежутке $[a; b]$ только неотрицательные значения. Фигуру, ограниченную таким графиком, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют *криво-*

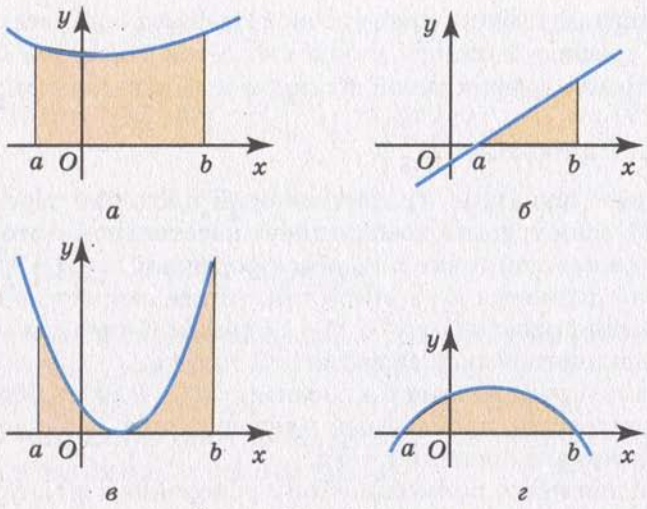


Рис. 105

линейной трапецией. Криволинейную трапецию называют также *подграфиком функции* $f(x)$ на $[a; b]$.

Несколько криволинейных трапеций изображено на рисунке 105.

Каждая криволинейная трапеция имеет определённую площадь (это доказано в строгих курсах математического анализа). Эти площади можно находить с помощью первообразных.

Теорема. **Площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$, равна $F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на $[a; b]$.**

Доказательство. Рассмотрим произвольную криволинейную трапецию, образованную графиком функции $f(x)$ на $[a; b]$ (*рис. 106*). Пусть x — произвольная точка отрезка $[a; b]$, а $S(x)$ — площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ на $[a; x]$. Понятно, что $S(x)$ — функция от x. Докажем, что $S'(x) = f(x)$ для каждого $x \in [a; b]$.

Дадим переменной x приращение Δx, тогда функция $S(x)$ получит приращение $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$ (*рис. 107*). Это — площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ на промежутке $[x; x + \Delta x]$, она приближённо равна площади прямоугольника с основанием Δx, и высотой $f(t)$, где t — некоторое число из промежутка $[x; x + \Delta x]$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, такое число t обязательно найдётся.

Следовательно, $\Delta S = f(t) \cdot \Delta x$, откуда $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(t)$.

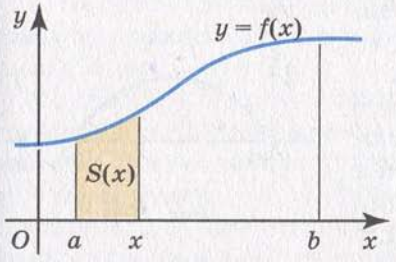


Рис. 106

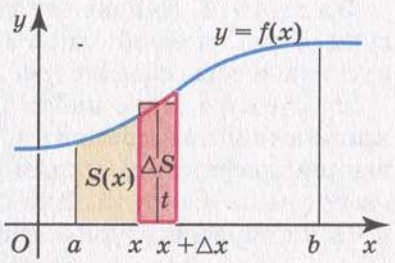


Рис. 107

Если $\Delta x \to 0$, то $t \to x$ и $f(t) \to f(x)$, ибо функция $f(x)$ непрерывна. Поэтому если $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$, т. е. $S'(x) = f(x)$.

Как видим, функция $S(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $[a; b]$. Поэтому если $F(x)$ — какая-либо другая первообразная для $f(x)$ на $[a; b]$, то $S(x) = F(x) + C$, где C — постоянная. Чтобы определить C, учтём, что $S(a) = 0$, ибо при $x = a$ криволинейная трапеция, образованная графиком функции $f(x)$ на $[a; x]$, вырождается в отрезок; его площадь равна 0. Имеем: $0 = F(a) + C$, отсюда $C = -F(a)$. Следовательно, $S(x) = F(x) - F(a)$. Если в это равенство подставим значение $x = b$, то получим площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ на $[a; b]$:

$$S = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Значение выражения $F(b) - F(a)$ вычисляют часто, поэтому для удобства его записывают ещё и так: $F(x)\Big|_a^b$. Итак, формула (1) приобретает вид:

$$S = F(x)\Big|_a^b. \qquad (2)$$

З а д а ч а 1. Найдите площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = x^2$ на промежутке $[1; 3]$.

Р е ш е н и е. На рисунке 108 изображена фигура, площадь которой нужно найти. Для функции $y = x^2$ первообразной есть $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$. Следовательно, искомая площадь $S = \dfrac{x^3}{3}\Big|_1^3 = 9 - \dfrac{1}{3} = 8\dfrac{2}{3}$ (кв. ед.).

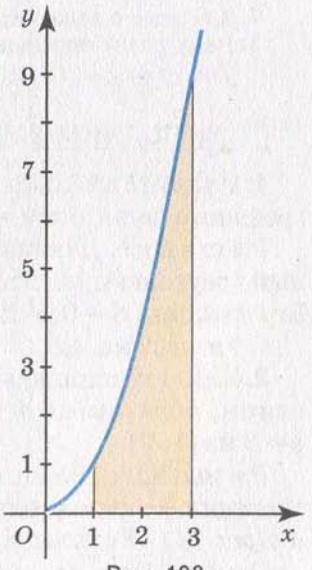


Рис. 108

Задача 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной одной аркой синусоиды и осью абсцисс (*рис. 109*).

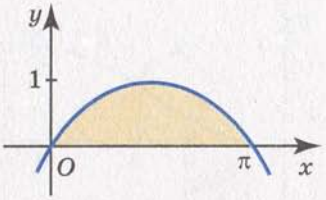


Рис. 109

Решение. Надо найти площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = \sin x$ на промежутке $[0; \pi]$. Для функции $y = \sin x$ первообразной есть функция $F(x) = -\cos x$. Следовательно, искомая площадь $S = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$ (кв. ед.).

Пользуясь термином «криволинейная трапеция», следует иметь в виду, что «криволинейная трапеция» не всегда является трапецией (*рис. 109*) и не всегда она криволинейная (*рис. 105, б*). А вообще она — не геометрическая фигура в научном понимании. Любое движение отображает каждую фигуру на равную ей фигуру такого же вида. А если «криволинейную трапецию», например, изображенную на рисунке 108, повернуть на 90°, она отображается на фигуру, которая не является криволинейной трапецией. Поэтому вместо «криволинейная трапеция» говорят и пишут «подграфик функции».

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Объясните, что такое криволинейная трапеция.
2. Как можно задать криволинейную трапецию?
3. Чему равна площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = x$ на $[0; 2]$.

Решение. Данная криволинейная трапеция — прямоугольный треугольник с катетами 2 и 2 (*рис. 110*). Его площадь $S = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 2 = 2$ (кв. ед.).

Ответ. 2 кв. ед.

2. Найдите площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = 3$ на $[1, 2]$.

Решение. Заданная криволинейная трапеция — прямоугольник с измерениями 1 и 3 (*рис. 111*). Его площадь $S = 1 \cdot 3 = 3$ (кв. ед.).

Ответ. 3 кв. ед.

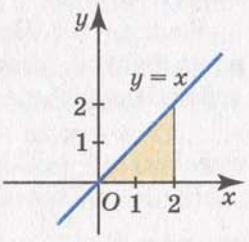


Рис. 110

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 4 - x^2$ и осью абсцисс.

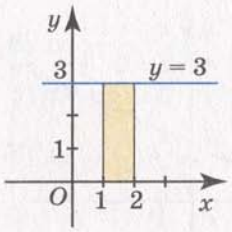


Рис. 111

Р е ш е н и е. Найдем абсциссы точек пересечения графика данной функции с осью Ox. В этих точках ордината функции равна нулю: $0 = 4 - x^2$, отсюда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ (*рис. 112*). Значит, надо найти площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = 4 - x^2$ на $[-2; 2]$. Одна из первообразных для данной функции $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$. Поэтому искомая площадь

$$S = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

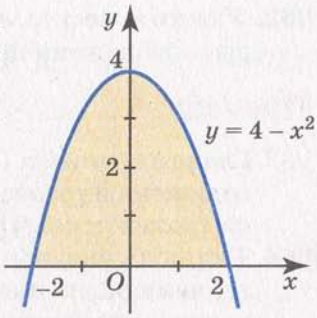


Рис. 112

О т в е т. $10\frac{2}{3}$ кв. ед.

Выполните устно

961. Какие из закрашенных на рисунке 113 фигур являются криволинейными трапециями?

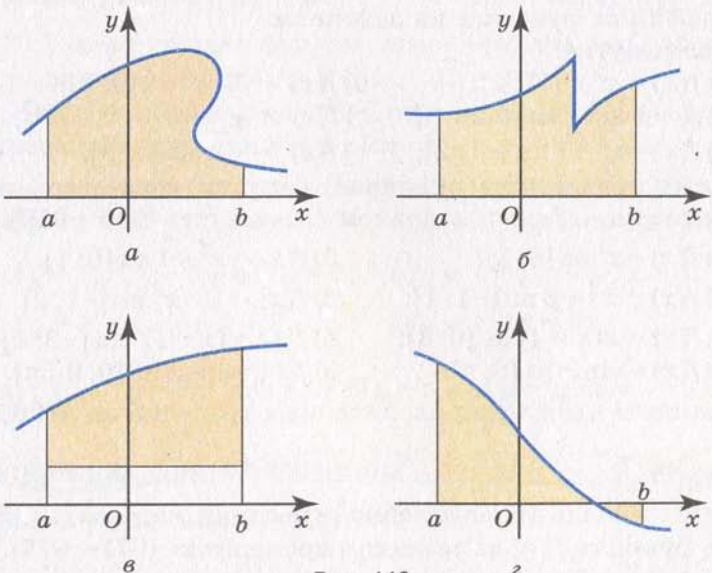


Рис. 113

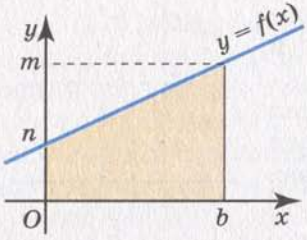


Рис. 114

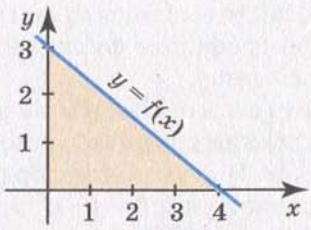


Рис. 115

962. Укажите несколько способов нахождения площади фигуры, изображенной на рисунке 114.

Уровень А

963. Глядя на рисунок 115, определите, чему равна площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ на промежутке: а) $[0; 4]$; б) $[2; 4]$.

964. Глядя на рисунок 116, определите, чему равна площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ на промежутке: а) $[-2; 2]$; б) $[0; 2]$.

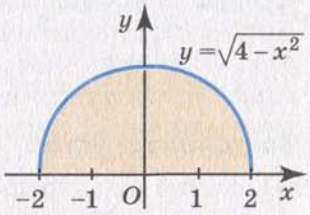


Рис. 116

965. Изобразите на рисунке криволинейную трапецию, образованную графиком функции на заданном промежутке:

а) $f(x) = x^2$ на $[1; 2]$; б) $f(x) = 0{,}2x^3$ на $[0; 3]$;
в) $f(x) = \sin x$ на $[0{,}5\pi; \pi]$; г) $f(x) = \operatorname{tg} x$ на $[0; 0{,}25\pi]$;
д) $f(x) = x^2 + 1$ на $[-1; 2]$; е) $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0; 5]$.

Найдите площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ на заданном промежутке (**966—969**).

966. а) $f(x) = x^3$ на $[0; 2]$; б) $f(x) = x^3 + 1$ на $[0; 1]$.

967. а) $f(x) = x^2 + 3$ на $[-1; 1]$; б) $f(x) = 5 - x^2$ на $[-1; 2]$.

968. а) $f(x) = x(x + 4)$ на $[0; 3]$; б) $f(x) = (x - 1)^2$ на $[-2; 0]$.

969. а) $f(x) = \sin x$ на $[0; \pi]$; б) $f(x) = \cos x$ на $[0; 0{,}5\pi]$.

970. Найдите площадь криволинейных трапеций из № 965.

Уровень Б

Найдите площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ на заданном промежутке (**971—975**).

971. $f(x) = x^2 + 3$: а) на $[0; 2]$; б) на $[-2; 0]$.

972. $f(x) = \cos x$: а) на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

973. $f(x) = x^3 + 1$: а) на $[0; 2]$; б) на $[-1; 1]$.

974. $f(x) = 1 + 2\sin x$: а) на $[0; \pi]$; б) на $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

975. $f(x) = (x + 2)^4$: а) на $[-2; 0]$; б) на $[-1; 0]$.

976. Вычислите двумя способами площадь подграфика функции $y = 3 + \frac{x}{2}$ на $[2; 6]$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями (**977—978**).

977. а) $y = -(x - 1)^3$, $y = 0$ и $x = 0$;

б) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

978. а) $y = -\frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = -3$;

б) $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

979. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, $y = e^x$; б) $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$, $y = e^{-x}$.

Уровень В

980. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $y = 3 + 2x - x^2$.

981. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $y = 3 - 2x - x^2$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями (**982—985**).

982. а) $y = x^3$, $y = 10 - x$, $y = 0$; б) $y = 2^x$, $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = 0$.

983. а) $y = -x^3$, $y = 5 + 4x$, $y = 0$; б) $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 4$.

984. а) $y = 4 - x^2$ и $y = x + 2$; б) $y = x^2$ и $y = 2x$.

985. а) $y = x^2$, $y = 6 - x$, $y = 0$; б) $y = \cos x$, $y = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$.

Упражнения для повторения

986. Найдите производную функции:

а) $y = \ln(1 + 3x)$; б) $y = xe^{-x}$; в) $y = \sqrt{x^2 - x}$; г) $y = \cos 2x$.

987. Решите неравенство:
а) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 > 0$; б) $\ln(x+3) + \ln 2 < 2\ln x - \ln(x-4)$.

988. В классе 40 учеников. По математике в первом семестре четыре ученика получили 12 баллов, два — 10, десять — 9, пятеро — 7, а остальные — 6 баллов. Постройте соответствующие столбчатую и секторную диаграммы.

§ 27. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Рассмотрим другой подход к определению площади криволинейной трапеции.

Пусть дана криволинейная трапеция, образованная графиком функции $f(x)$ на $[a; b]$ (*рис. 117*). Разобьём отрезок $[a; b]$ точками x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1} на n равных отрезков: $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ... , $[x_{n-1}; b]$.

Построим на первом из этих отрезков прямоугольник высотой $f(x_1)$, на втором — прямоугольник высотой $f(x_2)$, ... , на n-м — прямоугольник высотой $f(b)$. В результате получим ступенчатый многоугольник, составленный из n прямоугольников. Пусть основание каждого из построенных прямоугольников равно Δx; тогда площадь всего ступенчатого многоугольника

$$S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(b).$$

Суммы такого вида называют *интегральными суммами* функции $f(x)$ на $[a; b]$. Полученную интегральную сумму можно считать приближённым значением площади S криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ на $[a; b]$. При этом если $n \to \infty$, то $S_n \to S$ (*рис. 118*). Пишут: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Не только задача о нахождении площади криволинейной трапеции, но и много других важных прикладных задач приводят к вычислению пределов подобных интегральных сумм. Поэтому для такого понятия введено специальное название и обозначение.

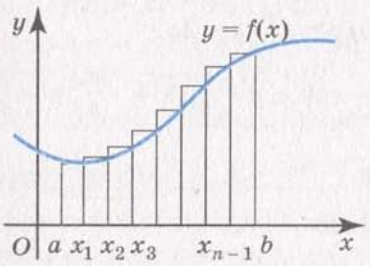


Рис. 117

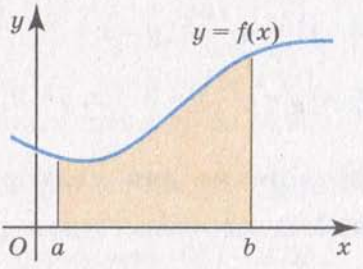


Рис. 118

Предел интегральной суммы S_n функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если $n \to \infty$, называют *определённым интегралом* функции $f(x)$ от a до b.

Его обозначают символом $\int_a^b f(x)dx$ (читают: интеграл от a до b эф от икс де икс). Здесь числа a и b — *пределы интегрирования*, $\int$ — *знак интеграла*, $f(x)$ — *подинтегральная функция*, x — *переменная интегрирования*.

Следовательно, площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ на $[a; b]$, равна $\int_a^b f(x)dx$, т. е. $S = \int_a^b f(x)dx$. Как доказано в предыдущем пункте, эта площадь равна $F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$. Поэтому

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Это — *формула Ньютона—Лейбница*, основная формула математического анализа. Она даёт возможность решать много разных интересных и содержательных задач — абстрактных и прикладных, в частности — и очень важных. Решали такие задачи сотни математиков еще задолго до создания математического анализа. Но для каждой задачи раньше они находили отдельный оригинальный способ решения. Найдя и обосновав формулу Ньютона—Лейбница, учёные получили общий и очень эффективный способ решения таких задач. Не случайно открытие формулы Ньютона—Лейбница специалисты считают самым важным открытием XVII века.

Рационализировать вычисления определённых интегралов часто помогает такое их с в о й с т в о:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Справедливость этой формулы вытекает из следующих преобразований:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)) =$$
$$= (F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

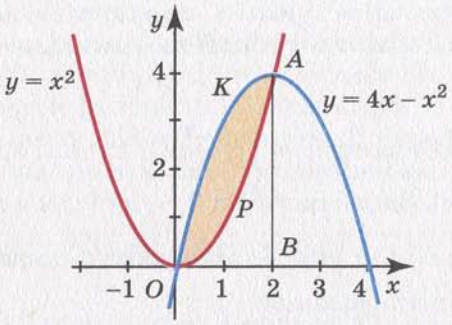


Рис. 119

З а д а ч а. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$ и $y = 4x - x^2$.

Р е ш е н и е. Построим графики данных функций *(рис. 119)*. Надо найти площадь закрашенной фигуры. Она равна разности площадей фигур $OBAK$ и $OBAP$. Границы интегрирования — абсциссы точек O и A, в которых пересекаются графики функций, т. е. значения x, удовлетворяющие системе уравнений $y = x^2$ и $y = 4x - x^2$. Из системы получим уравнение $x^2 = 4x - x^2$, корни которого $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

Следовательно, искомая площадь

$$S = \int_0^2 (4x - x^2)dx - \int_0^2 x^2 dx = \int_0^2 (4x - 2x^2)dx =$$

$$= \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right)\Bigg|_0^2 = 8 - 5\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

О т в е т. $2\frac{2}{3}$ кв. ед.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое интегральная сумма? Приведите примеры.
2. Что такое определённый интеграл функции $f(x)$ от a до b?
3. Как читают выражение $\int_a^b f(x)dx$? Назовите его составные части.
4. Сформулируйте формулу Ньютона—Лейбница.
5. Какое математическое открытие XVII в. считают важнейшим открытием человечества?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4$ и $y = 0$.

Р е ш е н и е. Фигура, о которой говорится в задаче, расположена ниже оси Ox (*рис. 120*), поэтому не соответствует определению криволинейной трапеции. Однако она симметрична относительно оси Ox криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = 4 - x^2$ на промежутке $[-2, 2]$. Площади этих фигур равны, поэтому

$$S = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

О т в е т. $10\frac{2}{3}$ кв. ед.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4$, $y = x^2 - 1$, $x = -2$, $x = 2$.

Р е ш е н и е. Данная фигура расположена по разные стороны от оси Ox (*рис. 121, а*). Перенесём её параллельно на 4 единицы в направлении оси Oy (*рис. 121, б*). Образованая фигура ограничена линиями $y = x^2$, $y = x^2 + 3$, $x = -2$ и $x = 2$. Её площадь, а следовательно, и площадь данной фигуры

$$S = \int_{-2}^{2} (x^2 + 3)dx - \int_{-2}^{2} x^2 dx = \int_{-2}^{2} 3dx = 3x\Big|_{-2}^{2} = 12 \text{ (кв. ед.)}.$$

О т в е т. 12 кв. ед.

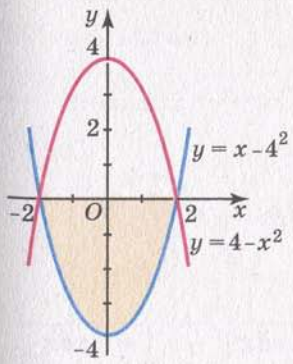
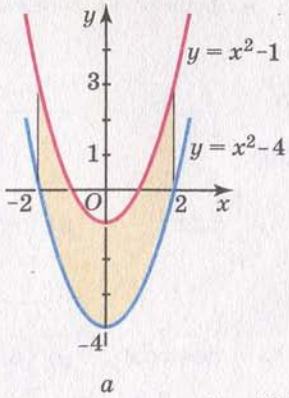
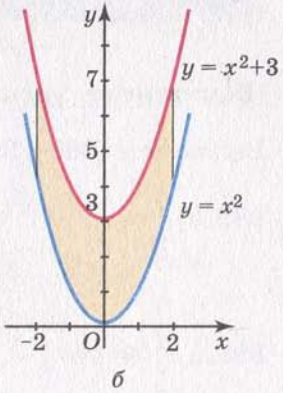


Рис. 120



а



б

Рис. 121

3. Докажите утверждение Кавальери. Если две фигуры можно разместить на плоскости так, что каждая секущая, параллельная данной прямой, пересекая одну из них, пересекает и другую по отрезку такой же длины, то площади этих фигур равны.

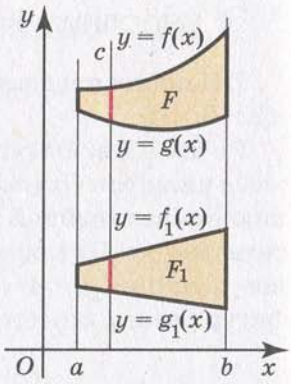


Рис. 122

Решение. Пусть фигуру F ограничивают линии $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ и $y = g(x)$, а фигуру F_1 — линии $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$ и $y = g_1(x)$ (*рис. 122*). Если каждая секущая c, параллельная оси Oy, пересекает фигуры F и F_1 по отрезкам равной длины, то $f(x) - g(x) = f_1(x) - g_1(x)$ для каждого $x \in [a; b]$. Тогда

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x))dx,$$

т. е. площади фигур F и F_1 равны.

КАВАЛЬЕРИ Бонавентура (1598—1647)

Итальянский математик, преподаватель Болонского университета, автор «Геометрии», в которой изложен метод неделимых. По сути он умел решать задачи, которые теперь решают, вычисляя интегралы $\int_a^b x^n dx$ при натуральных $n < 10$. Другие его труды: «Сто различных задач...», «Тригонометрия плоская и сферическая, линейная и логарифмическая».

Выполните устно

Вычислите (**989—990**).

989. а) $\int_0^1 x dx$; б) $\int_{-1}^1 x dx$; в) $\int_0^1 x^2 dx$; г) $\int_{-1}^1 x^2 dx$.

990. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; в) $\int_0^{\pi} \sin x dx$; г) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$.

Уровень А

991. Известно, что $\int\limits_0^1 f(x)dx = 5$, $\int\limits_1^3 f(x)dx = 8$. Найдите:

а) $\int\limits_0^1 3f(x)dx$; б) $\int\limits_0^3 f(x)dx$; в) $\int\limits_0^3 0{,}5f(x)dx$.

992. Известно, что $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx = a$, $\int\limits_{-1}^1 g(x)dx = b$. Найдите:

а) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{2}f(x)dx$; б) $\int\limits_{-1}^1 (f(x)+g(x))dx$; в) $\int\limits_{-1}^1 5g(x)dx$.

993. Сравните с нулём:

а) $\int\limits_0^1 0{,}5xdx$; б) $\int\limits_{-1}^0 xdx$; в) $\int\limits_0^1 (1-x)^2\,dx$; г) $\int\limits_{-\pi}^0 \sin x dx$.

994. Используя рисунок 123, *а*, сравните числа a, b и c, если:

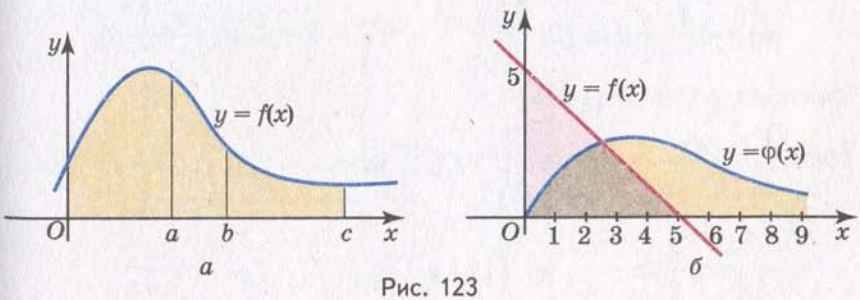
$$a = \int\limits_0^a f(x)dx,\quad b = \int\limits_0^b f(x)dx,\quad c = \int\limits_b^c f(x)dx.$$

995. Глядя на рисунок 123, *б*, сравните значения интегралов

$$\int\limits_0^3 f(x)dx \text{ и } \int\limits_3^6 \varphi(x)dx.$$

Вычислите интеграл (**996—1000**).

996. а) $\int\limits_0^1 10xdx$; б) $\int\limits_{-1}^2 x^2dx$; в) $\int\limits_0^{1,5} 3x^3dx$.



а *б*

Рис. 123

997. а) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$; б) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

998. а) $\int_0^2 \frac{x^3}{6}dx$; б) $\int_{-1}^1 (4-x^2)dx$; в) $\int_{-2}^0 (3x^2+1)dx$.

999. а) $\int_0^1 e^x dx$; б) $\int_0^1 2^x dx$; в) $\int_0^2 0{,}5^x dx$.

1000. а) $\int_1^e 2x^{-1}dx$; б) $\int_{16}^{81} 5x^{\frac{1}{4}}dx$; в) $\int_1^4 \left(x+x^{0,5}\right)dx$.

1001. Пользуясь формулой Ньютона—Лейбница, найдите площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ на заданном промежутке:

а) $f(x)=x$ на $[1;2]$; б) $f(x)=\cos x$ на $[-0{,}5\pi;0]$;

в) $f(x)=x^3+1$ на $[-1;1]$; г) $f(x)=2\sin x$ на $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

Уровень Б

Найдите площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ на заданном промежутке (**1002—1003**).

1002. а) $f(x)=(x-1)^3$ на $[1;2]$; б) $f(x)=\cos 2x$ на $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$;

в) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ на $[1;9]$; г) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ на $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

1003. а) $y=e^x$ на $[0;1]$; б) $y=2^x$ на $[-1;2]$;

в) $y=\frac{4}{x}+3$ на $[2;6]$; г) $y=4-\frac{1}{x}$ на $[-6;-3]$.

Вычислите (**1004—1005**).

1004. а) $\int_0^2 \frac{dx}{3x+1}$; б) $\int_{-1}^1 \left(1+\sqrt[3]{2x}\right)dx$; в) $\int_1^4 \left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)^2 dx$;

г) $\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{3}dx$; д) $\int_{-3}^{-1} (2+x)^2 dx$; е) $\int_{-2}^4 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

1005. а) $\int\limits_1^2 \frac{x^3+3x^2+1}{x}dx$; б) $\int\limits_1^3 \frac{x^2+4x+4}{x+2}dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{2x+3}{2x+1}dx$;

г) $\int\limits_0^{\pi} \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$; д) $\int\limits_0^{\pi} 2\sin^2\frac{x}{2}dx$; е) $\int\limits_0^{\pi} \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$.

1006. Докажите равенство:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями (**1007—1009**).

1007. а) $y=-x^2$ и $y=2x$; б) $y=6+x-x^2$ и $y=6-2x$;
в) $y=x^2$ и $y=2$; г) $y=4x+x^2$ и $y=4+x$.

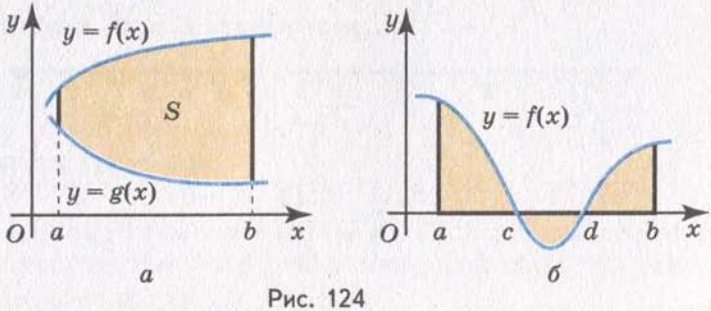
1008. а) $y=4x-x^2$ и $y=4-x$; б) $y=-x^3$, $y=0$ и $y=2+x$;
в) $y=x^3$, $y=8$ и $x=1$; г) $y=2x-x^2$ и $y=x^2$.

1009. а) $y=0{,}5^x$, $y=1$, $x=-2$; б) $y=3^{-x}$, $y=3$, $x=1$;
в) $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=e$; г) $y=x^{\sqrt{3}}$, $y=x^{-1}$, $x=0{,}5$.

Уровень В

1010. Докажите: а) если при каждом $x\in[a;b]$ $f(x)>g(x)$, то фигура, ограниченная линиями $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$, $y=g(x)$ (*рис. 124, а*), имеет площадь $S=\int\limits_a^b (f(x)-g(x))dx$;

б) если функция $f(x)$ конечное число раз меняет знак на отрезке $[a;b]$ (*рис. 124, б*), то фигура, ограниченная линиями $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$, имеет площадь $S=\int\limits_a^b |f(x)|dx$.



а *б*

Рис. 124

1011. При каждом ли действительном $t > 1$ выполняется равенство

$$\int_1^t \frac{1}{x}dx = \ln t\,?$$

Проиллюстрируйте его геометрически.

1012. Докажите, что:

а) $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx$;

б) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ для каждого $k > 0$;

в) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ для $a < c < b$.

1013. На рисунке 125 представлен график функции $y = f(x)$. Запишите числа a, b и c в порядке возрастания, если:

$$a = \int_{-5}^{-1} f(x)dx\,, \quad b = \int_{-1}^{4} f(x)dx\,, \quad c = \int_{4}^{7} f(x)dx\,.$$

Как изменить функцию $y = f(x)$, чтобы выполнялись неравенства: а) $a < c < b$; б) $b < a < c$?

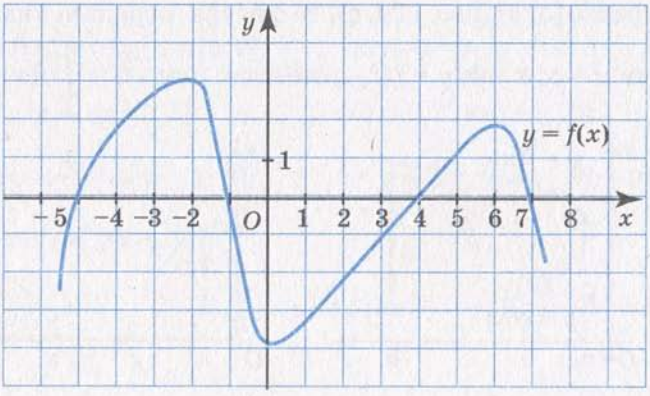


Рис. 125

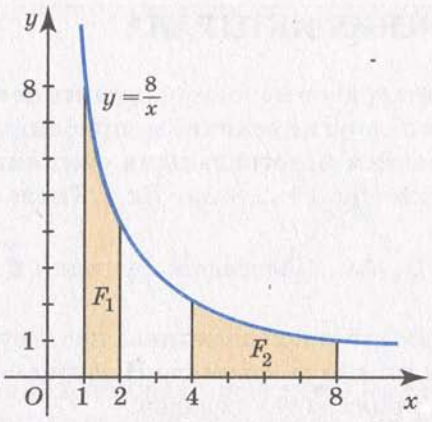


Рис. 126

1014. Докажите, что площадь фигуры F_1 равна площади фигуры F_2 (*рис. 126*). Обобщите задачу.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями (**1015—1017**).

1015. а) $y = x^2 + 4x$, $y = x^2 + 4x + 3$, $x = -2$, $x = 0$;

б) $y = 4^{1-x}$, $y = 5 - 4^x$; в) $y = 2^{|x|} + 1$, $y = 2 + \sqrt[3]{x^2}$;

г) $y = x^2 - 4x$, $y = x^2 - 4x + 3$, $x = 0$, $x = 4$.

1016. а) $\frac{4}{x} - 3$, $y = 1$, $x = 4$; б) $y = x^2 - 3x + 3$, $y = -x^2 + x + 9$;

в) $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $y = x + 3$; г) $y = x^2 - 5x + 4$, $y = 2x - 2$.

1017. а) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = -\frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

б) $y = -x^2 - 2x + 4$, $y = -x^2 + 4x + 1$, $y = 5$;

в) $y = x^2 - 3x$, $y = 4$; г) $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$.

Упражнения для повторения

1018. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; б) $y = e^{-x} + x$; в) $y = \sqrt{3x - 5}$.

1019. Решите уравнение:

а) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 10 = 0$; б) $2^{x-1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^{x+2}$.

1020. Семья получила новое жильё в 100 квартирном доме. Какова вероятность того, что номер новой квартиры не будет содержать цифру 5?

§ 28. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА

С помощью интегралов можно определять не только площади фигур, но и многие другие величины, приближённые значения которых выражаются интегральными суммами, т.е. суммами вида $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n)$. Такие суммы принято обозначать $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$. Подграфик функции $f(x)$ — математическая модель каждой такой величины, поэтому вычислять границы этих сумм можно по формуле Ньютона—Лейбница. Рассмотрим четыре примера таких задач.

1. О б ъ ё м т е л а в р а щ е н и я. Пусть тело образовано вращением подграфика функции $y = f(x)$ на $[0; a]$ вокруг оси Ox. Каждое тело вращения можно представить составленным из очень большого количества круглых пластинок, цилиндров с малыми высотами Δx (*рис. 127*). Радиус каждого такого цилиндра зависит от x и равен $f(x)$. Объём одного цилиндрика, соответствующего переменной x, равен $\pi f^2(x)\Delta x$. Всему телу вращения соответствует интегральная сумма

$$\pi f^2(x_1)\Delta x + \pi f^2(x_2)\Delta x + \ldots + \pi f^2(x_n)\Delta x.$$

Следовательно, его объём

$$V = \int_0^a \pi f^2(x)dx, \text{ или } V = \pi\int_0^a f^2(x)dx.$$

П р и м е р. Пусть надо найти вместимость сосуда высотой 4 дм, осевое сечение которого — график функции $y = x^2$ (*рис. 128*). Для неотрицательных значений x график такой функции симметричен относительно биссектрисы первого координатного угла графику функции $y = \sqrt{x}$. Поэтому искомый объём сосуда равен объёму тела, образованного вращением подграфика функции $y = \sqrt{x}$ на $[0; 4]$ вокруг оси Ox (*рис. 129*).

Итак, искомый объём

$$V = \pi\int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^4 x dx = 8\pi \text{ (дм}^3\text{)}.$$

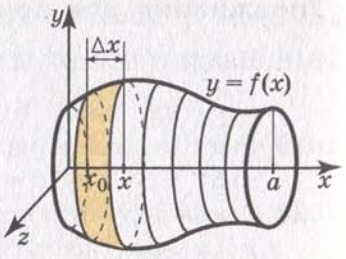


Рис. 127

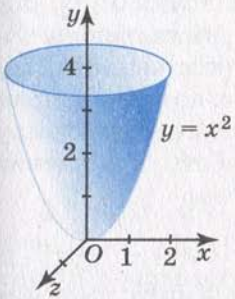


Рис. 128

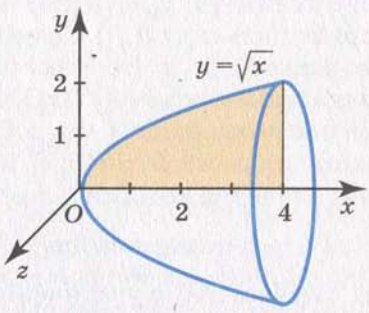


Рис. 129

С помощью определённых интегралов можно вычислять не только объёмы тел вращения, но и многих других тел: пирамид, усечённых пирамид и т. д.

2. Работа переменной силы. Если в результате действия постоянной силы F тело перемещается в направлении её действия на расстояние s, то при этом выполняется работа $A = Fs$. А если на тело действует сила не постоянная, а переменная?

Например, чтобы растянуть пружину на 1 см, на 2 см и т. д., надо прикладывать всё большую и большую силу. Согласно закона Гука, сила $f(x)$, которую необходимо приложить, чтобы растянуть пружину на расстояние x, пропорциональна этому расстоянию (для допустимых значений x), т. е. $f(x) = kx$. Коэффициент k различен для разных пружин. Например, если для растяжения пружины на 1 м надо приложить силу 50 Н, то $k = 50$. Какую выполняют работу, растягивая такую пружину на расстояние $l = 2$ м?

Поделим отрезок $[0; l]$, на который растягивается пружина, точками $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ на n равных частей (*рис. 130*). Пусть $l = x_n$, а Δx — длина каждой части. Чтобы растянуть пружину на

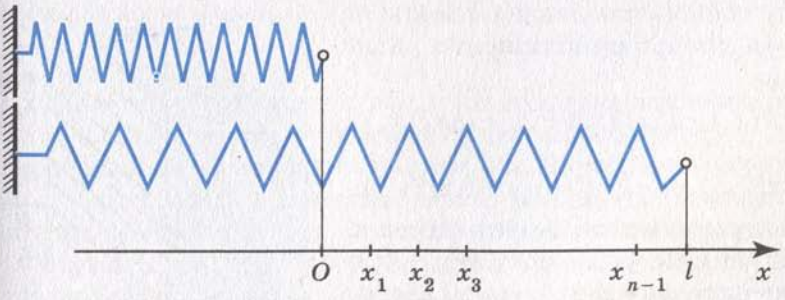


Рис. 130

расстояние $[0; x_1]$, т. е. переместить её конец из точки 0 в x_1, надо приложить силу $f(x_1)$. При этом выполненная работа приближённо равна $\Delta x f(x_1)$. Чтобы растянуть пружину на расстояние $[x_1; x_2]$, надо приложить силу $f(x_2)$ и выполнить работу, которая приближённо равна $\Delta x f(x_2)$, и т. д. Следовательно, чтобы растянуть пружину на расстояние $[0; l]$, надо выполнить работу, приближенное значение которой равно интегральной сумме

$$A_n = \Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \ldots + \Delta x f(x_n).$$

Значение A_n с увеличением n (и соответствующим уменьшением Δx) всё меньше отличается от точного значения искомой работы A, т. е. если $n \to \infty$, то $A_n \to A$. Следовательно,

$$A = \int_0^l f(x)dx = \int_0^l kx dx = \frac{1}{2} kl^2.$$

Если $k = 50$, $l = 2$ м, то $A = 100$ Дж.

3. Сила давления жидкости. Пусть разница уровней воды по обе стороны от ворот шлюза равна 8 м. Ворота имеют прямоугольную форму, их ширина $l = 20$ м *(рис. 131)*. Чему равна сила давления воды на ворота?

Известно, что с увеличением глубины давление воды увеличивается. Оно выражается формулой $p(x) = 9{,}8x$, где x — глубина в метрах, $p(x)$ — давление воды в килопаскалях. Пусть $OH = 8$ м — разница уровней воды.

Разобьём этот отрезок точками $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ на n равных частей и через них мысленно проведём горизонтальные прямые, которые разделят ворота шлюза на n равных полос. Если $OH : n = \Delta x$, то площадь каждой полосы равна $l\Delta x$. Давление на первую, вторую, третью и т. д. полосы приближённо равно соответственно $F(x_1)$, $F(x_2)$, ..., $F(x_n)$. Поэтому общая сила давления воды на ворота шлюза приближённо равна сумме

$$l\Delta x F(x_1) + l\Delta x F(x_2) + \ldots + l\Delta x F(x_n),$$

или

$$l\,(\Delta x F(x_1) + \Delta x F(x_2) + \ldots + \Delta x F(x_n)).$$

Полученное произведение ширины ворот l на интегральную сумму — приближённое значение силы давления воды на ворота. Точное её значение

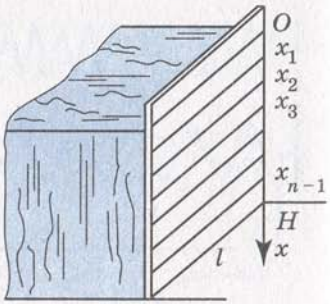


Рис. 131

$F = \int_0^h lF(x)dx = l\int_0^h F(x)dx$. Тогда

$$F = l\cdot\int_0^8 9{,}8xdx = 20\cdot 9{,}8\int_0^8 xdx = 196\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^8 \approx 6300\ (\text{Н}).$$

4. Экономическое содержание интеграла. Пусть функция $y = f(x)$ описывает изменение производительности некоторого производства в течение определённого времени. Найдём объём продукции U, произведённой за промежуток времени $[0; T]$.

Отметим, что когда производительность не изменяется в течение времени ($f(x)$ — постоянная функция), то объём продукции ΔU, произведённой за некоторый промежуток времени $[t; t + \Delta t]$, задаётся формулой $\Delta U = f(t)\Delta t$. В общем случае справедливо приближённое равенство $\Delta U \approx f(t)\Delta t$, где $t \in [t; t + \Delta t]$. Оно тем точнее, чем меньше Δt.

Разобьём отрезок $[0; T]$ на n равных частей точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Для объёма продукции ΔU_k, произведённой за промежуток времени $\Delta t = [t_{k-1}; t_k]$, имеем $\Delta U_k \approx f(t_k)\Delta t$, где $t_k \in [t_{k-1}; t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно,

$$U \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta U_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t.$$

Если $\Delta t \to 0$, то каждое из использованных приближённых равенств становится более точным, следовательно $U = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t$.

Если $f(t)$ — производительность труда в момент времени t, то объём произведённой продукции за промежуток $[0; T]$ *можно вычислить по формуле* $U = \int_0^T f(t)dt$.

Известный вам определённый интеграл учёные называют *интегралом Римана*, он применяется к ограниченным функциям и конечным интервалам интегрирования. Но решение многих важных задач нуждалось в нахождении границ бесконечных сумм, определённых широким классом функций и на бесконечных промежутках. Впоследствии были введены такие интегралы: *интегралы Лебега, Стилтьеса, интегралы кратные, криволинейные* и т. д. Их рассматривают в высших учебных заведениях.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Какие задачи можно решать с помощью определённого интеграла?
2. Как находят объём тела вращения?
3. Расскажите, как можно определять работу переменной силы.
4. Как можно определять силу давления жидкости в зависимости от глубины?
5. Каков экономический смысл интеграла?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Керосин содержится в цилиндрическом резервуаре (*рис. 132*), осевое сечение которого — квадрат со стороной 2 м. Какую работу нужно выполнить, чтобы откачать весь керосин из резервуара через отверстие в его верхнем основании, если плотность керосина равна 800 кг/м^3?

Р е ш е н и е. Решим сначала задачу в общем виде. Разобьём высоту цилиндра h на n равных частей точками $x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_n = h$. Через каждую точку деления параллельно основанию цилиндра проведём плоскость. Объём каждого из образовавшихся маленьких цилиндров равен $\pi r^2 \Delta x$, а масса — $\rho \pi r^2 \Delta x$, где ρ — плотность жидкости в резервуаре, r — радиус основания цилиндра, а $\Delta x = [x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Чтобы тело массой m поднять на высоту h, нужно выполнить работу $A = mgh$. В этих условиях работа по откачке жидкости, содержащейся в i-том цилиндре, выражается формулой $A_i = \rho \pi r^2 \Delta x\, g \cdot x_i$, а общая работа (по откачке жидкости из всего резервуара) —

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho \pi r^2 g x_i \Delta x = \rho \pi r^2 g \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x = \rho \pi r^2 g \int_0^h x\,dx .$$

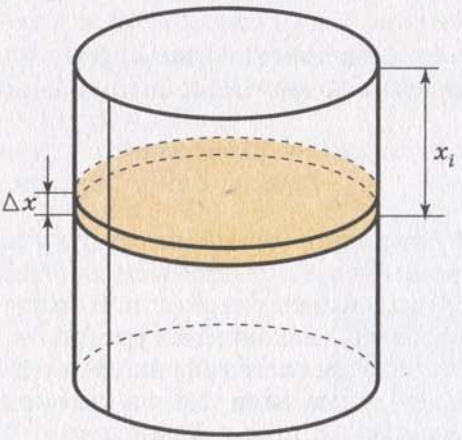


Рис. 132

По условию задачи $\rho = 800$ кг/м^3, $r = 1$ м, $g = 9{,}8$ м/с^2, поэтому

$$A = \rho\pi r^2 g\int_0^2 x\,dx = 800\cdot 3{,}14\cdot 9{,}8\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \approx 24\,618\cdot 2 = 49\,236 \approx 50\,(\text{кДж}).$$

Ответ. ≈ 50 кДж.

2. Производительность труда бригады рабочих в течение смены приближённо определяется формулой $f(t) = -2{,}53t^2 + 24{,}75t + 111{,}1$, где t — рабочее время в часах. Определите объём продукции, выпущенной за 5 рабочих часов.

Решение. Объём выпуска продукции в течение смены является первообразной от функции, выражающей производительность труда. Поэтому

$$U = \int_0^5 f(t)dt = \int_0^5 (-2{,}53t^2 + 24{,}75t + 111{,}1)dt =$$

$$= \left(-\frac{2{,}53t^3}{3} + \frac{24{,}75t^2}{2} + 111{,}1t\right)\Big|_0^5 = -\frac{2{,}53\cdot 125}{3} + \frac{24{,}75\cdot 25}{2} + 111{,}1\cdot 5 =$$

$$= -\frac{316{,}25}{3} + \frac{618{,}75}{2} + 555{,}5 \approx 759\ (\text{ед.})$$

Ответ. ≈ 759 единиц.

Уровень А

Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной заданными линиями (**1021—1024**).

1021. $y^2 - 4x = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, $y = 0$.

1022. $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$.

1023. $y = 2x + 1$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

1024. $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.

1025. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной дугой окружности $x^2 + y^2 = 16$, лежащей в первой четверти, и прямыми $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

Тело движется со скоростью $v(t)$. Найдите путь, пройденный телом за промежуток времени от t_1 до t_2 (время t — в секундах, скорость $v(t)$ — в м/с) (**1026—1028**).

1026. $v(t) = 3t + 2t^2$, $t_1 = 0$, $t_2 = 6$.

1027. $v(t) = 10t$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$.

1028. $v(t) = 3t^2 - 2t - 3$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$.

Уровень Б

1029. Производительность труда рабочего в течение дня задаётся функцией $z(t) = -0{,}00645t^2 + 0{,}05t + 0{,}5$ (д. ед./ч), где t — время в часах от начала работы, $0 \leq t \leq 8$. Найдите функцию $Q = Q(t)$, которая показывает объём продукции (в стоимостном выражении) и его величину за рабочий день.

1030. Найдите площадь закрашенной части фигуры (*рис. 133*).

1031. Какую работу нужно выполнить, чтобы растянуть пружину на 5 см, если сила в 1 Н растягивает её на 1 см?

1032. Для сжатия пружины на 1 см прикладывают силу в 9,8 Н. Какую работу выполняют, чтобы сжать пружину на 4 см?

1033. С какой силой давит вода на вертикальную плотину прямоугольной формы, если её основание равно 10 м, а высота — 6 м?

Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной заданными линиями **(1034—1036)**.

1034. $xy = 4$, $x - 2 = 0$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

1035. $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 = 1{,}5x$.

1036. $y = \cos x$, $y = \dfrac{9x^2}{\cdot 2\pi^2}$.

1037. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной дугой окружности $x^2 + y^2 = 18$, лежащей в первой четверти, параболой $3y = x^2$ и осью ординат.

1038. Для лучшего обслуживания заезда гонок серии «Формула-1» мастера определили лучший закон изменения скорости

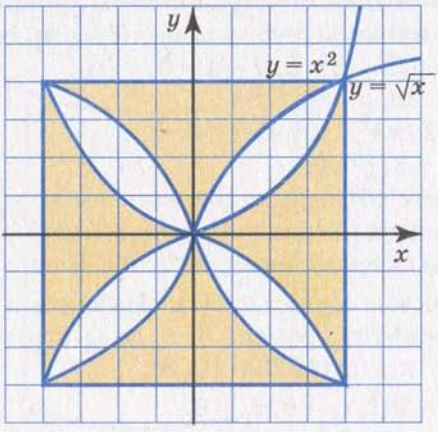


Рис. 133

движения автомобиля по прямой трассе: $v(t) = 2(t+2)^{\frac{5}{2}}$. Какой путь проедет пилот этой гонки за 7 с от начала движения (скорость $v(t)$ — в м/с)?

1039. Найдите путь, который пройдёт тело от начала движения до остановки, если его скорость $v(t) = 18t - 6t^2$ (время t — в секундах, скорость $v(t)$ — в м/с).

1040. Скорость движения поезда $v(t)$ со временем t изменяется по закону: $v(t) = 20 - 3t$. Найдите путь, который прошёл поезд за четвертую секунду своего движения (время t — в секундах, скорость $v(t)$ — в м/с).

1041. Сила тока в проводнике с течением времени изменяется по закону $I(t) = 4 + 2t$ (время t — в секундах; сила тока $I(t)$ — в амперах). Какое количество электричества пройдёт через поперечное сечение проводника за время от второй до шестой секунды?

Уровень В

1042. Прямоугольная пластина со сторонами a дм и b дм вертикально погружена в воду. Определите силу давления воды на пластину, если на поверхности воды находится сторона, длина которой a дм.

1043. Определите силу давления воды на вертикальную перегородку в канале, которая имеет форму полукруга радиуса a м, диаметр которого находится на поверхности воды.

1044. Вычислите работу, которая необходима для того, чтобы выкачать воду из полусферического котла радиуса R м.

1045. Вода, подаваемая из плоскости основания в цилиндрический бак через отверстие в дне, заполняет весь бак. Определите затрачиваемую при этом работу. Высота бака $h = 3$ м, радиус основания $r = 1$ м.

1046. Бак в форме куба заполнен бензином. Найдите отношение сил давления бензина на дно бака и на его боковую стенку.

1047. Заряды e_1 и e_2 (в Кулонах) отталкиваются с силой $F = k \cdot \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}$, где k — постоянный коэффициент, r — расстояние между зарядами (в метрах). Какую работу нужно выполнить, чтобы расстояние между зарядами уменьшилось от $r = a$ до $r = b$?

1048. Какую работу выполняют, запуская ракету массой m (кг) с поверхности Земли на высоту h (м), если радиус Земли равен R (м)?

Упражнения для повторения

1049. Решите неравенство:

а) $\frac{(x-3)(x+5)(x^2-4)}{(x^2-4x+4)(x-1)} \geq 0$; б) $\frac{x(x+5)(x^2-2x+1)}{(4x+4)(x+1)} < 0$.

1050. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 4,5 и знаменателем 0,75.

1051. Найдите производную функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = \sin 2x$; б) $f(x) = \sin^2 x$; в) $f(x) = 3\sin^2 5x$.

§ 29. О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Решения многих прикладных задач приводят к равенствам, связывающим неизвестные функции с их производными. Такие равенства называют *дифференциальными уравнениями*.

Примеры: $y' = 2y$, $yy' + 2x = 0$.

Рассмотрим некоторые из таких задач.

Задача о размножении бактерий. Масса бактерий в среде меняется со временем. При благоприятных условиях в каждый момент скорость размножения бактерий пропорциональна их массе. Надо определить функцию, выражающую зависимость массы бактерий от времени.

Решение. Пусть $y = m(t)$ — искомая функция. Её производная $y' = m'(t)$ — скорость размножения бактерий. Поскольку она в каждый момент t пропорциональна массе бактерий, то $y' = ky$. По содержанию задачи здесь $y > 0$ для каждого t, коэффициент k — постоянный для данного вида бактерий. Равенство $y' = ky$ — дифференциальное уравнение. Решим его.

$$\frac{y'}{y} = k, \quad (\ln y)' = k, \ln y = kt + C_1,$$

отсюда

$$y = e^{kt + C_1} = e^{C_1} e^{kt} = Ce^{kt}.$$

Здесь C — произвольная положительная постоянная, так как e^{C_1} постоянная при постоянной C_1.

Функция $y = Ce^{kt}$ — *общее решение* уравнения $y' = ky$. Подставляя вместо C различные действительные числа, можно получить бесконечное множество его *частных решений*.

Как видим, составленное по условию задачи одно дифференциальное уравнение не даёт возможности получить однозначный ответ. Если задачу дополнить «исходными данными», на-

пример, отметить, что в момент t_0 масса бактерий равнялась m_0, то можно определить постоянную C:

$$m_0 = Ce^{kt_0}, \text{ отсюда } C = m_0 : e^{kt_0} = m_0e^{-kt_0}.$$

Поэтому $y = Ce^{kt} = m_0e^{-kt_0}e^{kt} = m_0e^{k(t-t_0)}$.

$y = m_0e^{k(t-t_0)}$ — конкретное частное решение задачи.

Отыскание решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего исходные данные, называют *задачей Коши.*

Задача о радиоактивном распаде. Известно, что скорость уменьшения массы радиоактивного вещества в каждый момент времени t пропорциональна его массе. Как зависит масса изотопа Стронция (^{90}Sr) от времени, если для него коэффициент пропорциональности (постоянная распада) $k \approx 0{,}025$ и в момент времени $t = 0$ его масса равнялась 10 г?

Решение. Пусть искомая функция $y = m(t)$. Скорость её изменения $y' = m'(t)$. Согласно условию задачи $y' = -ky$ (перед k ставим минус, так как масса вещества уменьшается). Для изотопа стронция имеем дифференциальное уравнение $y' = -0{,}025y$. Его общее решение $y = Ce^{-0{,}025t}$.

Определим постоянную C по исходным данным задачи.

Поскольку при $t = 0$ масса стронция равнялась 10 г, то $10 = Ce^{-0{,}025 \cdot 0}$, отсюда $C = 10$.

Ответ. $y = 10e^{-0{,}025t}$.

Дифференциальное уравнение может содержать вторую производную, третью и т. д.

Примером дифференциального уравнения со второй производной является уравнение $y'' = \omega^2 y$. Его общее решение $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ содержит две постоянные: A и φ. Это уравнение — математическая модель многих задач о колеблющихся процессах, поэтому его называют *уравнением гармонического колебания.*

Различных видов дифференциальных уравнений много. Мы не можем говорить о них подробно, эта тема выходит за рамки школьной программы. Отметим только, что из всех математических дисциплин важнейшую роль в математике и прикладных науках играет математический анализ, а из всех разделов математического анализа — теория дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения — достаточно большой и важный раздел математического анализа. Много прикладных задач

из различных областей сводятся к решению дифференциальных уравнений или их систем. Дифференциальные уравнения бывают разных видов, их решение часто требует применения оригинальных способов и методов.

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Точка движется прямолинейно с переменной скоростью $v = 0{,}1t^3$ м/с. Какое расстояние она пройдет за первые 10 с?

Р е ш е н и е. Пройденное точкой расстояние s зависит от времени: $s = s(t)$. Скорость движения точки — производная этой функции: $s'(t) = 0{,}1t^3$. Решение полученного дифференциального уравнения — первообразная для функции $0{,}1t^3$, поэтому

$$s(t) = 0{,}1 \cdot \frac{t^4}{4} + C.$$

По содержанию задачи при $t = 0$ $s(t) = 0$, поэтому $0 = 0{,}1 \cdot \frac{0^4}{4} + C$, отсюда $C = 0$.

Следовательно, $s(t) = 0{,}025t^4$, $s(10) = 0{,}025 \cdot 10^4 = 250$ (м).

2. Постоянная распада изотопа Стронция $k \approx 0{,}025$. Найдите период его полураспада.

Р е ш е н и е. Пусть искомый период полураспада равен T. Тогда $0{,}5m_0 = m_0e^{-0{,}025T}$, отсюда $2 = e^{0{,}025T}$, $0{,}025T = \ln 2$, $T = \frac{\ln 2}{0{,}025} \approx 28$ (лет).

Выполните устно

1052. Какое из следующих уравнений является дифференциальным:

а) $2\sin x = y'$; б) $x^2 + y^2 = 1$; в) $y' = 0$; г) $2y' = x$?

1053. Сколько решений имеет уравнение $y' = 0$? Назовите их.

1054. Найдите какое-нибудь решение дифференциального уравнения:

а) $y' = y$; б) $y' = -y$; в) $y' = 3y$; г) $2y' = y$.

1055. Найдите какое-нибудь решение дифференциального уравнения:

а) $y'' = 0$; б) $y'' = y$; в) $y'' = 4y$; г) $y'' = x$.

Уровень А

1056. Покажите, что функция y является решением данного дифференциального уравнения:

а) $y' = 3y$, $y = 4e^{3x}$; б) $y' = -2y$, $y = 5e^{-2x}$;
в) $y' + 2y = 0$, $y = 0{,}5e^{-2t}$.

1057. Является ли функция $y = -e^{2t}$ решением уравнения:
а) $y' = 2y$; б) $y' + y = 0$; в) $y' = y^{-1}$?

1058. Какая из функций $y = e^x$, $y = e^x + 2$, $y = e^x + 2x$ является решением дифференциального уравнения $y' - y + 2 = 0$?

1059. Найдите какое-нибудь решение дифференциального уравнения $y' = y + 2$.

1060. Найдите функцию, которая удовлетворяет уравнение $y' = y$ и график которой проходит через точку K (0; 2).

1061. Найдите функцию, которая удовлетворяет уравнение $y' = 2y$ и график которой проходит через точку P (0; 0,5).

Уровень Б

1062. Является ли функция $y = \sin t$ решением дифференциального уравнения $y'' + y = 0$? А функция $y = \cos t$?

1063. Какие из функций $y = 3\cos t$, $y = -\cos t$, $y = 2\cos(t + 1)$ являются решениями дифференциального уравнения $y'' + y = 0$?

1064. Найдите какое-нибудь решение дифференциального уравнения $y'' = -y$. Запишите несколько других решений этого уравнения.

1065. Докажите, что функция $y = 2\cos 3t + 3\sin 3t$ является решением дифференциального уравнения $y'' + 9y = 0$.

1066. Докажите, что функция $y = \sqrt{x}$ является решением дифференциального уравнения $y'' + 2(y')^3 = 0$.

1067. Какая функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:
а) $f'(x) = x^2$ и $f(2) = 1$; б) $f'(x) = \sin x$ и $f(0) = 2$?

1068. Найдите общее решение дифференциального уравнения:
а) $y' = 3y$; б) $y' + y = 0$; в) $2y' = 5y$.

1069. Докажите, что одним из решений дифференциального уравнения $y^{IV} = y$ есть функция $y = \sin x$.

1070. Докажите, что функция $y = \sin x$ является одним из решений дифференциального уравнения $y'' + y = 2\cos x$.

Уровень В

1071. Составьте дифференциальное уравнение, решением которого является функция:
а) $y = e^{2x}$; б) $y = 2^x$; в) $y = 0{,}5^x$.

1072. Найдите закон движения точки, которая движется по прямой с постоянным ускорением, равным 2 м/с^2. В начальный момент времени ($t = 0$ с, $v = 5$ м/с) расстояние от начала координат равно 50 м.

1073. Тело бросили с земли вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. На какой высоте это тело будет через 3, 4, 5, 8 секунд?

1074. Для изотопа Кадмия период полураспада $T \approx 164$ суток. Через сколько суток его масса уменьшится в 10 раз?

1075. Для изотопа Полония период полураспада $T = 138$ суток. Найдите его постоянную распада k. Выведите формулу зависимости массы Полония от времени.

1076. От m миллиграммов Радия через t минут осталось в результате его распада n миллиграммов. Найдите период полураспада Радия.

1077. В некоторой стране на 1 января 2000 г. население составляло 100 млн человек, а его прирост за 2000 год составил 5 %. Предположите, что скорость прироста населения пропорциональна его имеющемуся количеству и найдите население этой страны в 2020 году.

Упражнения для повторения

1078. Сколько разных трицифровых чисел можно составить из цифр 0, 1, 2 так, чтобы цифры не повторялись? А из цифр 1; 2; 3?

1079. Вычислите:

а) $\int_1^2 \frac{x^3 - x^2 + 1}{x}\,dx$; б) $\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$; в) $\int_0^1 \frac{x+3}{x+1}\,dx$.

1080. Упростите выражение:

а) $3^{\log_3(1-2x)}$; б) $7^{\log_7(y+1)}$; в) $9^{\log_3 x}$; г) $7^{2\log_7(y-1)}$.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ КОНТРОЛЮ

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Какая из функций $F(x)$ — первообразная для функции $f(x) = 2x + 3x^2$:

а) $F(x) = x^2 + x^3$; б) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$;

в) $F(x) = 3x^2 + 2x^3$; г) $F(x) = 2 + 3x$?

2. Найдите одну из первообразных для функции $f(x) = 4\sin x$.

а) $F(x) = 4\cos x$; б) $F(x) = -4\cos x$;

в) $F(x) = 4\sin x$; г) $F(x) = -4\sin x$.

3. Найдите одну из первообразных для функции $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

а) $F(x) = \frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3}$; б) $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3}$; в) $F(x) = \frac{2 \cdot \ln 3}{3^x}$; г) $F(x) = \frac{3^x}{\ln x}$.

4. Найдите одну из первообразных для функции $f(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$.

а) $F(x) = \operatorname{tg} x$; б) $F(x) = -\operatorname{tg} x$; в) $F(x) = \operatorname{ctg} x$; г) $F(x) = -\operatorname{ctg} x$.

5. Найдите $\int\limits_0^3 f(x)dx$, если $\int\limits_0^1 f(x)dx = 1$, $\int\limits_1^3 f(x)dx = 2$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

6. Для какой функции первообразной есть функция $F(x) = 3x^5$:

а) $f(x) = 5x^3$; б) $f(x) = 15x^4$; в) $f(x) = \frac{3}{5}x^6$; г) $f(x) = 15x^6$?

7. Вычислите интеграл $\int\limits_1^2 3x^2 dx$.

а) 4; б) 6; в) 21; г) 7.

8. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

а) $\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{2}$; в) 1; г) -1.

9. Вычислите интеграл $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

а) 2; б) 4; в) 6; г) 9.

10. Укажите формулу для вычисления площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = (x-2)^2$ на отрезке $[1; 2]$.

а) $S = \int\limits_1^2 (x-2)^2 dx$; б) $S = \int\limits_2^1 (x-2)^2 dx$;

в) $S = \int\limits_1^2 \frac{1}{3}(x-2)^3 dx$; г) $S = \int\limits_2^1 \frac{1}{3}(x-2)^3 dx$.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+1$; б) $f(x)=-4\sin x+5\cos x$;

в) $f(x)=\frac{6}{\cos^2 x}+7\sin x$.

2. Для данной функции найдите первообразную, график которой проходит через заданную точку A:

а) $y=\sin x$, $A\left(\frac{\pi}{3};\frac{1}{4}\right)$; б) $y=-\frac{1}{\sin^2 x}$, $A\left(\frac{\pi}{4};1\right)$;

в) $y=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{5}}$, $A\left(\frac{5\pi}{4};0\right)$.

3. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_1^2 2^{4x}dx$; б) $\int\limits_1^2\left(e^{2x}+\frac{2}{x}\right)dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos x dx$.

4. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=t^3+t$ (м/с). Найдите путь, пройденный телом за промежуток времени от 1 с до 2 с.

5. Используя геометрический смысл интеграла, вычислите $\int\limits_{-4}^{4}\sqrt{64-x^2}$.

6. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_1^2\left(4x^2+2x+1\right)dx$; б) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{(5x+11)^3}$; в) $\int\limits_{-2}^{-1}\left(|x|+|x-3|\right)dx$.

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $y=x^3$, $y=0$, $x=2$; б) $y=x^2-2x+2$, $y=2+4x-x^2$.

8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линией $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке $M(3;5)$ и осью ординат.

9. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=2t+n$ (м/с). Найдите значение n, если известно, что за промежуток времени от $t=0$ до $t=2$ с тело прошло путь длиной 40 м.

10. Вычислите объём тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 2$.

Исторические сведения

Введению понятия интеграл предшествовала большая работа многих математиков. Еще Архимед (III век до н. э.) находил площади и объёмы геометрических фигур методами, подобными вычислению интегральных сумм.

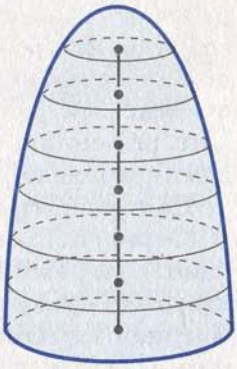


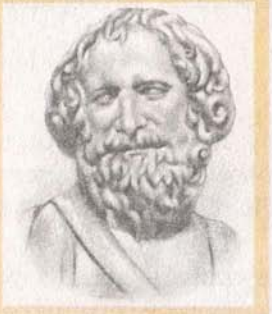
Рис. 134

Например, чтобы найти объём тела, которое теперь мы называем фигурой, образованной вращением вокруг оси Oy подграфика функции $y = x^2$ на $[0; h]$, Архимед разбивал это тело на n слоев одинаковой толщины (*рис. 134*). Далее рассматривал суммы объёмов цилиндров, описанных вокруг каждого из этих слоёв и вписанных в них, показывал, что разница этих сумм при увеличении n становится сколь угодно малой. Наконец, находил объём рассматриваемого тела как общий предел этих сумм (хотя, разумеется, чёткого понятия предела у него ещё не было). Так Архимед решил многие задачи, которые теперь решают с помощью интегралов

$$\int_0^a x\,dx,\ \int_0^a x^2\,dx,\ \int_0^a (x^2 + bx)\,dx,\ \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi,\ \int_0^a \sin\varphi\,d\varphi.$$

Архимед показал, что значение числа π находится между $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$. Число $3\frac{1}{7} \approx 3{,}14$ называют числом Архимеда.

АРХИМЕД (ок. 287—212 до н. э.)



Древнегреческий ученый, изобретатель, конструктор. Показал, как можно вычислять площади параболического сегмента, объёмы различных тел вращения, как находить суммы членов геометрической прогрессии, суммы квадратов натуральных чисел. Важнейшие труды Архимеда: «О квадратуре параболы», «О спирали», «Метод», «Об измерении круга», «Книга лемм», «О коноидах и сфероидах», «О числе песчинок», «О плавающих телах». В последнем обоснованно закон Архимеда.

Подобными методами пользовался и немецкий астроном и математик И. Кеплер (1571—1630). В частности, считая, что каждое тело вращения состоит из бесконечного множества «тонких кружочков», он определил объёмы 92 таких тел. Ещё дальше пошёл итальянский математик Б. Кавальери. Представляя каждую фигуру составленой из «неделимых» — плоскую фигуру из отрезков, а тело из плоских фигур, — он сформулировал свои принципы (см. задачу 708; аналогичное утверждение верно и для объёмов тел). Сам Кавальери считал эти утверждения очевидными, принимал их без доказательства, как принципы (лат. principium — начало, основа, то же, что и аксиома). Методами современной математики их можно доказать как теоремы.

Для развития интегрального исчисления много сделали П. Ферма, Б. Паскаль, И. Барроу, а особенно И. Ньютон и Г. Лейбниц. Они работали независимо друг от друга, один в Англии, второй в Германии, шли разными путями, а пришли к одному и тому же открытию, которое теперь называют основной теоремой математического анализа или формулой Ньютона—Лейбница. Установив связь между интегрированием и дифференцированием, они тем самым создали очень эффективный метод решения многих важных задач. Создание этого метода специалисты считают величайшим открытием XVII века.

Проследим, как постепенно менялась система понятий и обозначений, связанных с интегралами. Кавальери, называя отрезки линиями, площадь плоской фигуры считал суммой всех линий. Лейбниц заметил: «целесообразнее писать знак $\int$ вместо *все* и $\int l$ вместо *все линии*». Последнее обозначение впоследствии он заменил на $\int y$, а ещё позже — на $\int y dx$. Л. Эйлер писал и пределы интегрирования:

$$\int p dx \begin{bmatrix} ab\, x = a \\ ad\, x = b \end{bmatrix}.$$

Здесь латинские слова *ab* и *ad* означают *от* и *до*. Современное обозначение интеграла предложил французский математик Ж. Фурье (1768—1830).

Термин интеграл (лат. integer — целый) ввёл в 1690 г. И. Бернулли. Понятие первообразная, которую сначала называли примитивной (primitivus — начальный), ввёл в 1797 г. Ж. Лагранж.

ОСТРОГРАДСКИЙ Михаил Васильевич
(1801—1862)

Всемирно известный украинский математик, член Петербургской, Туринской, Римской, Американской, Французской академий наук. Родился в с. Пашенная (Полтавская обл.). Исследовал проблемы математического анализа, теории дифференциальных уравнений, математической физики, теоретической механики, алгебры, теории вероятностей, гидромеханики. Дружил с Т. Г. Шевченко. Создал школу прикладной механики.

Из учёных Российской империи наибольший вклад в развитие интегрального исчисления сделали М. В. Остроградский и В. Я. Буняковский. Оба родились в Украине, учились в Париже — самом известном в те времена центре математической науки, оба работали в Петербурге и были самыми известными математиками России. Помимо прочего, Остроградский разработал общий метод интегрирования рациональных функций, обосновал важное правило Остроградского и формулу Остроградского. Буняковский первый доказал важное неравенство

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b \varphi^2(x)dx,$$

которое теперь называют *неравенством Буняковского*.

Термин «дифференциальное уравнение» ввёл Г. Лейбниц. С помощью дифференциальных уравнений можно решать важнейшие прикладные задачи, поэтому разработкой теории таких уравнений занималось много ведущих математиков. В XVIII ст. теория дифференциальных уравнений отделилась от математического анализа в большой раздел современной математики.

БУНЯКОВСКИЙ Виктор Яковлевич
(1804—1889)

Украинский математик (родился в г. Бар Винницкой обл.). Написал 168 научных работ, из которых наибольшую роль сыграли «Основы математической теории вероятностей», «Лексикон чистой и прикладной математики», «Арифметика». Главный эксперт России по вопросам статистики и страхования, почётный член всех российских университетов, вице-президент Академии Наук.

Из украинских математиков в области интегрального исчисления работало много известных учёных, в частности: С. Н. Бернштейн (1880—1968), Н. Н. Боголюбов (1909—1992), Е. Я. Латышева (1897—1956), Ю. А. Митропольский (1917—2008), О. С. Парасюк (1921—2007), Ю. Д. Соколов (1896—1971), И. З. Штокало (1897—1987).

Коротко о Николае Николаевича Боголюбове (старшем). Раннее детство провёл в Киеве, семилетку закончил в селе Большая Круча на Полтавщине. Школьный учитель уверял, что мальчик никогда не станет математиком, а он в 13 лет проявил такие способности, что ему разрешили слушать лекции в Киевском университете. В 17 лет написал математическую работу, за которую в Киеве ему присвоили ученую степень кандидата наук, а Болонская Академия наук (Италия) наградил премией. Диплома о высшем образовании он не имел, поэтому поступил в аспирантуру (Киев, 1925 г.) по отдельному постановлению правительства. В 1930 году Академия наук СССР присудила ему учёную степень доктора наук. Впоследствии он стал авторитетнейшим из математиков, лауреатом многих наград, дважды Героем Труда. Он создал мощные научные школы в Киеве, Москве, Дубне, воспитал многих известных математиков, в частности — и своего сына Николая Николаевича (младшего).

ГЛАВНОЕ В РАЗДЕЛЕ 3

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке I, если для каждого значения x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Каждая первообразная для функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из этих первообразных, а C — произвольное число. Графики любых двух первообразных для функции $f(x)$ такие, что их можно совместить параллельным переносом вдоль оси ординат.

Операцию нахождения первообразных называют *интегрированием* функции. Эта операция обратная дифференцированию.

Общий вид всех первообразных для функции $f(x)$ называют *неопределённым интегралом* данной функции:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Первообразные и неопределённые интегралы функции $f(x)$ можно находить по формулам, представленным в таблице.

Данная функция	k (постоянная)	x^n $(n \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	e^x
Её первообразная	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\ln \lvert x \rvert + C$	$2\sqrt{x} + C$	$e^x + C$

Данная функция	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	a^x
Её первообразная	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ — первообразная для $f(x) + g(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, а $k \neq 0$, b — постоянные, то:

- $kF(x)$ — первообразная для функции $k\,f(x)$,
- $\frac{1}{k}F(kx+b)$ первообразная для функции $f(kx+b)$.

Площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$, равна $F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на $[a; b]$.

Предел интегральной суммы $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n)$, если $n \to \infty$, называют *определённым интегралом* функции $f(x)$ от a до b и обозначают символом $\int_a^b f(x)dx$.

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ — формула Ньютона—Лейбница.

Её называют также *основной формулой математического анализа.*

Тело, образованное вращением подграфика функции $y = f(x)$ на $[0; a]$ вокруг оси Ox, имеет объём $V = \pi\int_0^a f^2(x)dx$.

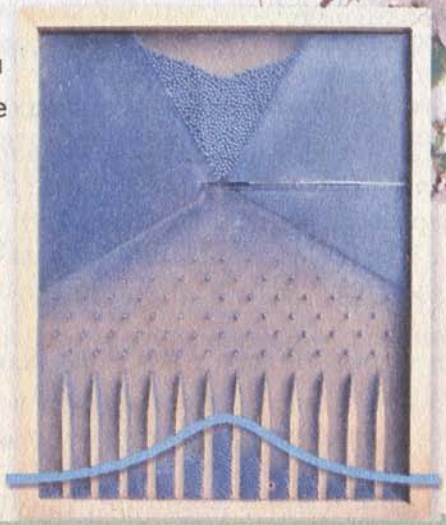
Если $f(t)$ — производительность труда в момент времени t, то объём произведенной продукции за промежуток $[0; T]$ можно вычислить по формуле $U = \int_0^T f(t)dt$.

Раздел 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Основные темы раздела

- Элементы комбинаторики
- Комбинаторные правила суммы и произведения
- Перестановки, размещения, комбинации
- Размах, мода, медиана, середнее значение выборки
- Графическое представление информации о выборке
- Случайное событие
- Вероятность события



Примечательно, что наука (теория вероятностей), которая началась с изучения игры, вознеслась к важнейшим объектам человеческого познания.

П. Лаплас

В этом разделе вы ознакомитесь с важными и интересными отраслями математики — комбинаторикой, теорией вероятностей и математической статистикой. Они тесно связаны между собой и используются во многих теоретических и прикладных исследованиях. Методы теории вероятностей и математической статистики широко применяют в социологии, экономике, организации производства, радиотехнике, военном деле, кибернетике, биологии, статистической физике, астрономии и т. д.

§ 30. КОМБИНАТОРИКА. ПРАВИЛА СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Вспомните, что в математике любые совокупности называют *множествами*. Объекты, входящие в множества, называют его *элементами*. Множества обозначают большими латинскими буквами, а их элементы записывают в фигурных скобках. Считают, что все элементы множества различны.

Например, $A = \{a, b, c\}$, $M = \{1, 5, 7, 9\}$.

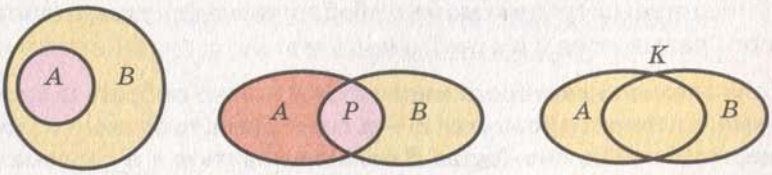
Множества бывают *конечными* и *бесконечными*. Если множество не содержит ни одного элемента, его называют *пустым* и обозначают символом $\varnothing$.

Два множества называют *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Если A — часть множества B, то его называют *подмножеством* множества B и записывают $A \subset B$. Наглядно это изображают с помощью диаграммы Эйлера (*рис. 135, а*). В частности, для числовых множеств правильные такие соотношения:

$$N \subset Z,\ N \subset Q,\ N \subset R,\ Z \subset Q,\ Z \subset R,\ Q \subset R.$$

Случается, что множества A и B имеют общие элементы. Если множество P содержит все общие элементы множеств A и B и только их, то множество P называют *пересечением множеств* A и B. Записывают это так: $A \cap B = P$. Диаграммой Эйлера пересечение изображают, как показано на рисунке 135, *б*. Множество, содержащее каждый элемент каждого из множеств A и B и только эти



а *б* *в*

Рис. 135

элементы, называется *объединением множеств* A и B. Если K — объединение множеств A и B, то пишут $A \cup B = K$ (*рис. 135, в*).

Разницей множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B. Его обозначают $A \setminus B$. Например, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 5, 7, 8\}$, то $A \cap B = \{1, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$, $A \setminus B = \{2, 3\}$.

Говоря «множество», «подмножество», порядок их элементов не учитывают. Говорят, что они не упорядочены. Рассматривают и *упорядоченные множества*. Так называют множества с фиксированным порядком элементов. Их обозначают не фигурными, а круглыми скобками. Например, из элементов множества $\{a, b, c\}$ можно образовать 6 трёхэлементных упорядоченных множеств:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Как множества, все они равны, как упорядоченные множества — разные.

Существуют задачи, в которых надо определить, сколько различных подмножеств или упорядоченных подмножеств можно образовать из элементов данного множества. Их называют *комбинаторными задачами*, а раздел математики, в котором рассматривается решение комбинаторных задач, называют *комбинаторикой*.

***Комбинаторика* — раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными правилами.**

Рассмотрим два основных правила, с помощью которых решается много комбинаторных задач.

З а д а ч а 1. В городе N есть два университета — политехнический и экономический. Абитуриенту нравятся три факультета в политехническом университете и два — в экономическом. Сколько возможностей имеет студент для поступления в университет?

Р е ш е н и е. Обозначим буквой A множество факультетов, которые выбрал абитуриент в политехническом университете, а буквой B — в экономическом: $A = \{m, n, k\}$, $B = \{p, s\}$. Поскольку эти множества не имеют общих элементов, то в целом абитуриент имеет $3 + 2 = 5$ возможностей для поступления в университет.

Описанную ситуацию можно обобщить в виде утверждения, которое называется п р а в и л о м с у м м ы.

Если элемент некоторого множества A можно выбрать m способами, а элемент множества B — n способами, то элемент из множества A или из множества B можно выбрать $m + n$ способами.

Правило суммы распространяется и на большее количество множеств.

З а д а ч а 2. Планируя летний отдых, семья определилась с местами его проведения: в Одессе — 1, в Евпатории — 3, в Ялте — 2, в Феодосии — 2. Сколько возможностей выбора летнего отдыха имеет семья?

Р е ш е н и е. Поскольку все базы отдыха разные, то для решения задачи достаточно найти сумму элементов всех множеств, о которых говорится: $1 + 3 + 2 + 2 = 8$. Следовательно, семья может выбирать отдых из 8 возможных.

З а д а ч а 3. От пункта A до пункта B ведут три тропинки, а от B до C — две. Сколько маршрутов можно проложить от пункта A до пункта C?

Р е ш е н и е. Чтобы пройти от пункта A до пункта B, надо выбрать одну из трёх тропинок: 1, 2 или 3 (*рис. 136*). После этого следует выбрать одну из двух других троп: 4 или 5. Всего от пункта A до пункта C ведут 6 маршрутов, потому что $3 \cdot 2 = 6$. Все эти маршруты можно обозначить с помощью пар:

(1; 4), (1; 5), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5).

Обобщим описанную ситуацию.

Если первый компонент пары можно выбрать m способами, а второй — n способами, то такую пару можно выбрать mn способами.

Это — п р а в и л о п р о и з в е д е н и я, его часто называют о с н о в н ы м п р а в и л о м к о м б и н а т о р и к и. Обратите внимание: речь идёт об упорядоченных парах, составленных из различных компонентов.

Правило произведения распространяется и на упорядоченные тройки, четвёрки и любые другие упорядоченные конечные множества. В частности, *если первый компонент упорядоченной тройки можно выбрать m способами, второй — n способами, третий — k способами, то такую упорядоченную тройку можно выбрать mnk способами.* Например, если столовая на обед приготовила 2 первых блюда — борщ (б) и суп (с), 3 вторых — котлеты (к), вареники (в), голубцы (г) и 2 десертных — пирожные (п) и мороженое (м), то всего из трёх блюд столовая может предложить 12 различных наборов, поскольку $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

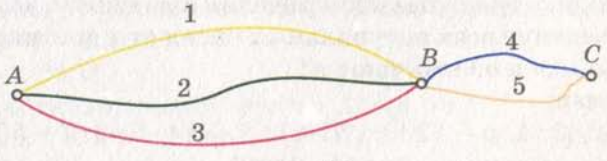


Рис. 136

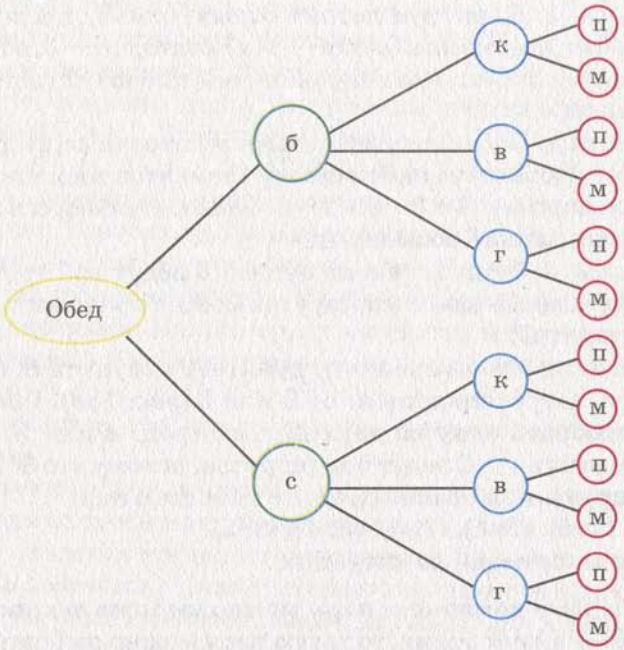


Рис. 137

Описанной ситуации соответствует диаграмма, изображённая на рисунке 137. Такие диаграммы называют *деревьями*.

З а д а ч а 4. Сколько разных поездов можно составить из 6 вагонов, если каждый из вагонов можно поставить на любом месте?

Р е ш е н и е. Первым можно поставить любой из 6 вагонов. Имеем 6 выборов. Второй вагон можно выбрать из оставшихся 5 вагонов. Поэтому, согласно правилу умножения, два первых вагона можно выбрать $6 \cdot 5$ способами. Третий вагон можно выбрать из 4 вагонов, которые остались. Поэтому три первых вагона можно выбрать $6 \cdot 5 \cdot 4$ способами. Продолжая подобные рассуждения, приходим к ответу: всего можно составить $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ различных поездов.

Обратите внимание на решение последней задачи. Оно свелось к вычислению произведения всех натуральных чисел от 1 до 6. В комбинаторике подобные произведения вычисляют часто.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n называют n *факториалом* и обозначают $n!$

Например:

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120, \quad 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$

Условились считать, что $1! = 1$ и $0! = 1$.

Языком теории множеств правила суммы и произведения можно сформулировать следующим образом.

Если пересечение множеств A и B пустое, то количество элементов в их объединении $n(A \cup B)$ *равно сумме количества элементов множеств A и B:*

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Если множества A и B имеют общие элементы, то

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Если множества A и B конечны, то количество возможных пар (a, b), *где* $a \in A$, $b \in B$, *равно произведению количества элементов множеств A и B:*

$n(A \cap B) = n(A) \cdot n(B)$.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Какие задачи называют комбинаторными?
2. Что такое комбинаторика?
3. Сформулируйте правило суммы.
4. Сформулируйте основное правило комбинаторики.
5. Приведите пример диаграммы-дерева.
6. Что такое факториал? Как его обозначают?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. В розыгрыше на первенство города по баскетболу принимают участие команды из 12 школ. Сколькими способами могут быть распределены первое и второе места?

Р е ш е н и е. Первое место может получить одна из 12 команд. После того, как определён обладатель первого места, второе место может получить одна из 11 команд. Следовательно, общее количество способов, которыми можно распределить первое и второе места, равно $12 \cdot 11 = 132$.

О т в е т. 132.

2. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если ни одна цифра не повторяется?

Р е ш е н и е. Первой цифрой числа может быть одна из 5 цифр 1, 2, 3, 4, 5. Если первая цифра выбрана, то вторая может быть выбрана 5-ю способами, третья — 4-мя, четвёртая — 3-мя. Согласно правилу умножения общее число способов равно:

$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

О т в е т. 300.

3. Упростите выражение $n(n + 1) \cdot (n - 1)!$

Р е ш е н и е. $n(n + 1) \cdot (n - 1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) = (n + 1)!$.

Выполните устно

1081. Вычислите:
а) 2!; б) 3!; в) 4!; г) 5!.

1082. В классе 11 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно делегировать одного ученика в школьный комитет самоуправления?

1083. В классе 11 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно делегировать двух учеников в школьный комитет самоуправления?

1084. В классе 11 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно делегировать одну девушку и одного парня в школьный комитет самоуправления?

Уровень А

1085. Задайте перечнем элементов множество одноцифровых чисел, которые делятся: а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 11.

1086. Выпишите все подмножества для каждого из множеств:
а) $\{\bullet, \blacksquare\}$; б) $\{*, \Delta, \#\}$.

1087. Найдите $A \cap B$ и $A \cup B$, если:
а) $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{5, 7, 3\}$; б) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, -1, 2, -3\}$.

1088. Вычислите:
а) 0!; б) 1!; в) 6!; г) 8!; д) 10!.

1089. Упростите выражение:
а) $n!\,(n+1)$; б) $n\,(n-1)!$; в) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$; г) $\dfrac{n!}{n}$.

1090. В магазине есть три вида печенья и десять видов конфет. Сергей хочет купить сестре печенье или конфеты. Сколькими способами он может это сделать?

1091. Для завершения формирования экспедиции в Антарктиду дополнительно рассматривались заявления 10 претендентов на должность врача, 5 претендентов на пост повара и 3 претендентов на должность техника. Ни один кандидат не претендовал одновременно на две или более должностей. Сколькими способами можно заполнить одно свободное место в экспедиции?

1092. Сколькими способами можно посадить четырёх детей на скамейке?

1093. На вершину горы ведут 4 тропы. Сколькими маршрутами турист может подняться на гору и спуститься с неё, выбирая для спуска и подъёма различные тропы?

1094. Столовая приготовила на завтрак 3 вторых блюда (A, B, C) и два напитка (M, K). Сколько разных наборов из таких блюд и напитков можно выбрать на завтрак? Составьте соответствующую диаграмму-дерево.

Уровень Б

1095. Сколькими способами 5 человек могут образовать очередь в кассу?

1096. Сколько различных предложений можно написать словами «мы», «любим», «играть»? А словами «мы», «очень», «любим», «играть»?

1097. Сколькими способами девочка может нанизать на нитку 8 различных бусин?

1098. Сколько трёхцифровых чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

1099. Составьте задачу по рисунку 138 и решите её.

1100. Сколько подмножеств имеет множество, содержащее: а) один элемент; б) два элемента; в) три элемента; г) четыре элемента?

1101. Проверьте утверждение «множество, состоящее из n элементов содержит 2^n подмножеств» для $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

1102. Вычислите:

а) $10! : 5!$; б) $13! : 10!$; в) $20! : 25!$; г) $100! : 97!$.

1103. Упростите выражение:

а) $n! : (n - 1)$; б) $(n - 1)! : n!$; в) $(n + 1)! : (n - 1)!$.

1104. Вычислите $(2n)! : n!$, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 10$.

1105. Найдите значение n, если:

а) $n! = (n - 1)! \cdot 8$; б) $(n + 2)! = 132 \cdot n!$

1106. Восемь друзей решили провести турнир по шашкам так, чтобы каждый сыграл с каждым одну партию. Сколько партий будет сыграно?

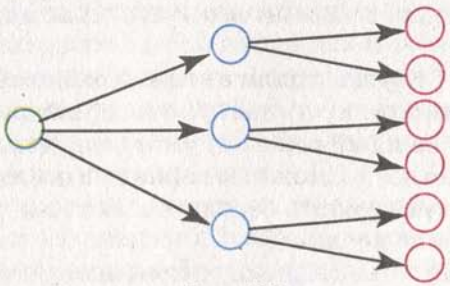


Рис. 138

1107. Столовая приготовила на обед 3 первых блюда (A, B, C), 3 вторых (a, $б$, c) и 3 третьих (x, p, y). Сколько разных наборов из трёх блюд можно выбрать на обед? Составьте соответствующую диаграмму-дерево.

1108. Создают эмблему школы, элементом которой должен быть многоугольник определённого цвета. Сколько таких эмблем можно создать, если рассматривать три фигуры (треугольник, квадрат, шестиугольник) и 4 цвета (синий, зелёный, жёлтый, красный)?

1109. Сколько различных «кортежей» может сложить мальчик из четырёх игрушечных автомобилей: белого, жёлтого, синего и красного? Составьте соответствующую диаграмму-дерево.

Уровень В

1110. Сколько нечётных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если цифры не могут повторяться?

1111. К морю ведёт 7 дорог. Сколькими способами отдыхающий может добраться к морю и вернуться обратно? Рассмотрите случаи, когда движение к морю и с моря происходит: а) одной дорогой; б) различными путями; в) одним из двух предыдущих способов.

1112. В среду по расписанию в 11-А классе есть 6 разных уроков, среди которых — алгебра и геометрия. Сколькими способами можно составить расписание так, чтобы алгебра и геометрия стояли рядом?

1113. Во вторник по расписанию в 11-Б классе есть 7 разных уроков, среди которых — физика и астрономия. Сколькими способами можно составить расписание так, чтобы физика и астрономия не стояли рядом?

1114. Сколько различных упорядоченных троек можно образовать из четырёх элементов a, b, c, d? А из пяти элементов a, b, c, d, e?

1115. Однажды 8 друзей зашли в кафе. Хозяин любезно предложил им интересную сделку: они приходят в кафе ежедневно, но каждый раз по-другому садятся за тот же стол. Как только все возможные варианты посадки исчерпаются, их будут угощать бесплатно. Есть ли смысл принять предложение хозяина?

1116. В пиццерии готовят большую и маленькую пиццу с толстой и тонкой основой. Сколько различных видов пиццы можно

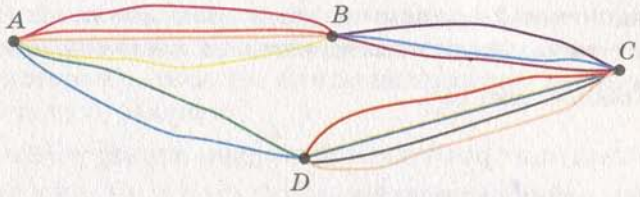


Рис. 139

заказать в этой пиццерии, если для тонкой пиццы используют три вида начинки, а для толстой — четыре?

1117. Составьте задачу по рисунку 139 и решите её.

Упражнения для повторения

1118. Найдите производную функции:

а) $y = 2x^3 - 3$; б) $y = 2x(x - 3)$;

в) $y = 2\sin x - 3$; г) $y = 2 - 3e^x$.

1119. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x-3} = 5$; б) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$.

1120. Упростите выражение:

а) $1 - \sin^2 x$; б) $1 + \operatorname{tg}^2 x$; в) $1 + \cos 2x$.

§ 31. РАЗМЕЩЕНИЯ И ПЕРЕСТАНОВКИ

З а д а ч а 1. Сколькими способами собрание из 20 человек может избрать председателя и секретаря?

Р е ш е н и е. Председателя можно выбрать 20-ю способами, секретаря — из остальных 19 человек — 19-ю способами. По правилу произведения председателя и секретаря собрания могут выбрать $20 \cdot 19 = 380$ способами.

Обобщим задачу. Сколько упорядоченных *k-элементных* подмножеств можно составить из n различных элементов? На первое место можно поставить любой из данных n элементов. На второе место — любой из остальных $n - 1$ элементов и т. д. На последнее k-е место можно поставить любой из остальных $n - k + 1$ элементов. Из правила произведения следует, что из данных n элементов можно получить $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)$ k-элементных упорядоченных подмножеств.

Например, из 4 элементов a, b, c, d упорядоченных двухэлементных подмножеств можно образовать всего $4 \cdot 3 = 12$: $(a; b)$, $(a; c)$, $(a; d)$, $(b; a)$, $(b; c)$, $(b; d)$, $(c; a)$, $(c; b)$, $(c; d)$, $(d; a)$, $(d; b)$, $(d; c)$.

Упорядоченое k-элементное подмножество n-элементного множества называют *размещением из n элементов по k*. Их число обозначают A_n^k.

Из предыдущих рассуждений следует, что $A_4^2 = 12$ и что для любых натуральных n и k $(n \geq k)$

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

В правой части этого равенства k множителей. Поэтому результат можно сформулировать в виде такого утверждения.

Число размещений из n элементов по k равно произведению k последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых n.

Примеры. $A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$; $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Задача 2. Сколькими способами можно составить дневное расписание из пяти разных уроков, если класс изучает 10 различных предметов?

Решение. Речь идёт об упорядоченных 5-элементных подмножествах некоторого множества, состоящего из 10 элементов. Это размещения. $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$.

Ответ. 30 240 способами.

Число размещений из n элементов по k можно вычислять и по другой формуле: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ (проверьте самостоятельно).

Размещение n элементов по n называют *перестановками* из n элементов. Их число обозначают P_n.

Например, из трёх элементов a, b, c можно образовать 6 различных перестановок: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Следовательно, $P_3 = 6$.

Подставив в формулу числа размещений $k = n$, получим, что $P_n = n!$.

Число перестановок из n элементов равно $n!$

Примеры. $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$;

$$P_7 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Задача 3. Сколькими способами можно составить список из 10 фамилий?

Решение. $P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$.

Ответ. 3 628 800 способами.

Некоторые комбинаторные задачи сводятся к решению уравнений, в которых переменная указывает на количество элементов в некотором множестве или подмножестве. Рассмотрим несколько таких уравнений.

1. Решите уравнение $A_x^2 = 20$.

Р е ш е н и е. Пользуясь формулой размещений, данное уравнение можно заменить таким:

$x(x-1) = 20$, или $x^2 - x - 20 = 0$, отсюда $x = 5$, $x = -4$.

По условию задачи x — натуральное число, поэтому $x = -4$ — посторонний корень. Следовательно, $x = 5$.

2. Решите уравнение $A_x^5 = 30 \cdot A_{x-2}^3$.

Р е ш е н и е. Запишем выражения A_x^5 и A_{x-2}^3 через произведения.

Имеем: $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 30(x-2)(x-3)(x-4)$. Поскольку по смыслу задачи $x \geq 5$, то $x \neq 2$, $x \neq 3$ и $x \neq 4$. Поэтому последнее уравнение можно сократить на произведение $(x-2)(x-3)(x-4)$. Тогда $x(x-1) = 30$, $x^2 - x - 30 = 0$, $x = 6$, $x = -5$. Но уравнение $A_x^5 = 30 \cdot A_{x-2}^3$ удовлетворяет только одно значение: $x = 6$.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое размещение из n элементов по k?
2. Как обозначают и как вычисляют количество размещений из n элементов по k?
3. Что такое перестановки из n элементов?
4. Как обозначают и как вычисляют количество перестановок из n элементов?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Команда из трёх человек выступает в соревнованиях по художественной гимнастике, в которых принимают участие ещё 27 спортсменок. Сколькими способами могут распределиться места между членами команды, при условии, что на этих соревнованиях ни одно место не делится?

Р е ш е н и е. Речь идёт об упорядоченных 3-элементных подмножествах множества, состоящего из 30 элементов. Это — размещения. $A_{30}^3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360$.

2. Сколькими способами можно разместить на полке 5 дисков?

Р е ш е н и е. Речь идёт об упорядоченных 5-элементных множествах. Искомое количество способов равно P_5. $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

О т в е т. 120 способами.

3. Изображённое на рисунке 140 кольцо раскрашено в 7 цветов. Сколько существует таких колец, раскрашенных теми же цветами только в других последовательностях?

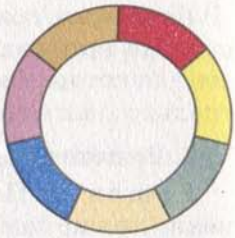


Рис. 140

Р е ш е н и е. Зафиксируем одну какую-нибудь часть кольца, окрашенную одним цветом. 6 других частей можно раскрасить P_6 способами.

$$P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

О т в е т. 720 колец.

4. Сколько можно составить различных неправильных дробей, числителями и знаменателями которых есть числа 3, 5, 7, 9, 11, 13?

Р е ш е н и е. С п о с о б 1. Дробей, у которых числитель не равен знаменателю, можно составить A_6^2, то есть $6 \cdot 5 = 30$. Из этих дробей только половина — неправильных, то есть — 15.

Неправильными являются также дроби, у которых числитель равен знаменателю. Таких дробей в нашем случае 6. Итак, всего можно составить $15 + 6 = 21$ (дробь).

С п о с о б 2. Если знаменатель неправильной дроби 3, то его числителями могут быть все 6 данных чисел. Если знаменатель 5, то числителями неправильной дроби могут быть 5 чисел (5, 7, 9, 11, 13) и т.д. Наконец, если знаменатель — число 13, то существует только 1 неправильная дробь, со знаменателем 13. Всего таких неправильных дробей существует $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

Ответ. 21 дробь.

Выполните устно

1121. Составьте все возможные перестановки из букв α, β, γ.

1122. Вычислите: а) P_2; б) P_3; в) P_4.

Уровень А

1123. Сколькими способами 4 ученика могут сесть за двумя двухместными партами?

1124. Сколькими способами можно поздравить маму и бабушку с праздником, если вы имеете 3 разные открытки?

1125. Вычислите: а) A_3^2; б) A_5^2; в) A_5^3; г) A_7^5.

1126. Составьте все возможные перестановки из элементов A, B, C.

1127. Вычислите P_n, если n равно 6, 7, 8, 9.

1128. Сколькими способами 6 учеников могут сесть за тремя двухместными партами?

1129. На тарелке есть 7 груш. Пятеро детей берут из неё по одной груше. Сколькими способами это можно сделать?

1130. Сколько разных трицифровых чисел можно написать цифрами 6, 7 и 8 так, чтобы все цифры каждого числа были разные?

1131. Сколько разных четырёхзначных чисел можно написать цифрами 0, 1, 2, 3 так, чтобы все цифры каждого числа были разные?

1132. Выпишите все размещения из букв A, B, C, D по 2.

1133. Сколькими способами можно рассадить 5 учеников на 10-ти местах?

Уровень Б

1134. Вычислите: а) $A_5^3 : A_8^4$; б) $P_9 : A_9^8$; в) $A_{50}^2 \cdot P_2$.

1135. Решите уравнение:

а) $A_x^2 = 20$; б) $A_{x+1}^2 = 156$; в) $A_{x+1}^3 = \frac{1}{14} \cdot A_8^7 : P_4$.

1136. В начальной школе 11 классов и 11 учителей классоводов. Сколькими способами можно распределить классы между учителями?

1137. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

1138. В 9-м классе лицея «Престиж» изучают 12 предметов. Дневное расписание содержит 6 уроков. Сколькими способами можно составить дневное расписание?

1139. Сколько существует трёхцифровых чисел, все цифры которых нечётные и разные?

1140. Сколько существует дробей, числители и знаменатели которых — различные простые числа меньше 15?

1141. Сколько существует правильных дробей, числители и знаменатели которых — простые числа, не больше 17?

1142. Сколько существует трёхцифровых чисел, все цифры которых различны и чётные?

1143. Сколько существует n-цифровых чисел, все цифры которых различны, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$?

1144. Сколько существует трёхцифровых чисел, в которых каждая цифра не менее 5 и цифры в каждом числе не повторяются?

1145. Сколькими способами можно пошить трёхцветный флаг из трёх горизонтальных полос одинаковой ширины, если есть ткань 5-ти разных цветов?

Уровень В

1146. Сколько словарей надо иметь, чтобы непосредственно переводить с пяти различных языков на каждый из них?

1147. В 11-А классе обучается 10 юношей и 12 девушек, каждый из которых умеет петь, танцевать и играть на музыкальном инструменте. Для участия в концерте выбирают три дуэта из разных учеников (певческий, танцевальный и инструментальный). Сколькими способами это можно сделать, если дуэт состоит из юноши и девушки?

1148. В библиотеку поступило 20 новых книг, среди которых 6 — одного автора, а остальные — разных. Сколькими способами эти книги можно разложить на полки так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

1149. Население Мурляндии составляет 333 миллиона жителей. Каждый ребёнок при рождении получает не более трёх разных имён из 333 существующих. Сколькими способами в Мурляндии можно назвать ребёнка? Обязательно ли найдутся в этой стране жители с одинаковыми полными именами?

1150. Докажите, что при каждом натуральном n выполняется равенство: $P_{n+1} = nP_n$.

1151. Докажите, что: а) $A_m^{m-1} = P_m$; б) $A_n^k = n\,A_{n-1}^{k-1}$.

1152. Решите уравнение:

а) $A_x^4 = 56 \cdot A_x^2$; б) $A_x^5 = 72 \cdot A_{x-2}^3$;

в) $P_x = 42 \cdot P_{x-2}$; г) $P_x = 720 \cdot P_{x-3}$.

1153. Сколько существует правильных дробей, в числителе и знаменателе которых записаны простые числа двух первых десятков?

1154. Сколько существует неправильных дробей, числитель и знаменатель которых — простые числа меньше 30?

Упражнения для повторения

1155. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $y = 2x^2 - 5$; б) $y = 2^x$; в) $y = 2\sin x$; г) $y = \cos 3x$.

1156. Решите уравнение:

а) $5^{2x+3} = 5^{13-x}$; б) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$.

1157. Запишите в виде логарифма выражение:

а) $1 + 2\ln x$; б) $3\lg x - \lg 2x$; в) $2 + \log_2 2x$.

§ 32. КОМБИНАЦИИ И БИНОМ НЬЮТОНА

Пусть дано множество из трёх элементов: $\{a, b, c\}$. Его двухэлементных подмножеств (не упорядоченных) существует всего три: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$. Говорят, что существует 3 комбинации из трёх элементов по два. Пишут: $C_3^2 = 3$.

Комбинацией из n элементов по k называют любое k-элементное подмножество n-элементного множества.

Число комбинаций из n элементов по k обозначают C_n^k. В отличие от размещений, комбинации — подмножества неупорядоченные.

Сравните: $C_3^2 = 3$, а $A_3^2 = 6$. При тех же значениях n и k значение C_n^k менше A_n^k. Можно также указать, во сколько раз меньше. Каждую *k-элементную* комбинацию можно упорядочить P_k способами. В результате из одной комбинации получают P_k размещений (упорядоченных подмножеств) из тех же элементов. Итак,

число k-элементных комбинаций в P_k раз меньше числа размещений из тех же k элементов.

То есть, $C_n^k = A_n^k : P_k$, отсюда

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ или } C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Пример 1. Вычислите: а) C_7^3; б) C_{20}^{18}.

Решение.

а) $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$; б) $C_{20}^{18} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{18! \cdot 19 \cdot 20}{2! \cdot 18!} = 190$.

Обратите внимание! $C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$. Полагают также, что $C_n^0 = 1$ для любого $n \in N$.

З а д а ч а. Сколькими способами из 25 учеников можно выбрать на конференцию двух делегатов?

Р е ш е н и е. Здесь $n = 25$, $k = 2$, порядок учеников не имеет значения.

$$C_{25}^2 = \frac{25 \cdot 24}{1 \cdot 2} = 300.$$

О т в е т. 300-ми способами.

Докажем, что для натуральных значений n и k $(n > k)$ правильно тождество $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дано $n + 1$ различных элементов: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}. Всего из них можно образовать C_{n+1}^k различных k-элементных комбинаций. Это количество комбинаций вычислим другим способом. Из данных $n + 1$ элементов, кроме последнего a_{n+1}, можно образовать C_n^k комбинаций. Остальные k-элементные комбинации из всех данных элементов можно образовать, если к каждой комбинации из первых n элементов по $k - 1$ дописать элемент a_{n+1}. Таких комбинаций C_n^{k-1}.

Следовательно, $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$. А это и требовалось доказать.

Такое комбинаторное тождество можно доказать также, воспользовавшись формулой числа комбинаций.

С комбинациями тесно связана формула бинома Ньютона.

Вспомните формулу квадрата двучлена: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Умножив $a^2 + 2ab + b^2$ на $a + b$ и на $a^2 + 2ab + b^2$, получим формулы:

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Эти три формулы можно записать и так:

$$(a + b)^2 = a^2 + C_2^1 ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + C_3^1 a^2b + C_3^2 ab^2 + b^3,$$

$$(a + b)^4 = a^4 + C_4^1 a^3b + C_4^2 a^2b^2 + C_4^3 ab^3 + b^4.$$

Оказывается, для каждого натурального значения n правильна и общая формула:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n. \quad (*)$$

Это тождество называют *формулой бинома Ньютона*, а её правую часть *разложением бинома Ньютона*. *Бином* — латинское название двучлена. Пользуясь этой формулой, возведём, например, двучлен $a + b$ в пятую степень. Поскольку $C_5^1 = 5$, $C_5^2 = 10$, $C_5^3 = 10$, $C_5^4 = 5$, то $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Доказать формулу бинома Ньютона можно методом математической индукции.

Доказательство. Предположим, что формула (*) верна для некоторого натурального показателя степени n. Покажем, что тогда она верна и для следующего за ним значения $n + 1$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) =$$

$$= (a^n + C_n^1\, a^{n-1}b + C_n^2\, a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}\, ab^{n-1} + b^n)(a+b) =$$

$$= a^{n+1} + C_n^1\, a^n b + C_n^2\, a^{n-1}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}\, a^2 b^{n-1} + ab^n +$$

$$+ a^n b + C_n^1\, a^{n-1}b^2 + C_n^2\, a^{n-2}b^3 + \ldots + C_n^{n-1}\, ab^n + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + (C_n^1 + 1)a^n b + (C_n^2 + C_n^1)a^{n-1}b^2 + \ldots + (C_n^{n-1} + 1)ab^n + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + C_{n+1}^1\, a^n b + C_{n+1}^2\, a^{n-1}b^2 + \ldots + C_{n+1}^n\, ab^n + b^{n+1}.$$

Выражения в скобках преобразованы согласно формулы $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

Следовательно, если формула бинома Ньютона верна для n, то она правильна и для $n + 1$. Для $n = 1$ она правильна, так как $(a + b)^1 = a + b$. Поэтому на основе аксиомы математической индукции можно утверждать, что формула верна для любого натурального показателя n.

Вычислять коэффициенты разложения бинома Ньютона можно не по формуле числа комбинаций, а пользуясь *числовым треугольником Паскаля* — своеобразным способом вычисления коэффициентов разложения бинома Ньютона $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . . . . .

Треугольник Паскаля можно продолжать как угодно далеко. Это следует из тождества $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$. Его крайние числа — единицы, а каждое другое равно сумме двух ближайших к нему чисел сверху.

Например, прибавляя числа шестой строки (для $n = 5$), получим числа следующей строки (для $n = 6$): 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Следовательно, $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

Общий член разложения бинома $(a+b)^n$ можно определить по формуле $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Например:

- первый член — $T_1 = C_n^0 a^n$;
- второй член — $T_2 = C_n^1 a^{n-1} b^1$;
- третий член — $T_3 = C_n^2 a^{n-2} b^2$.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое комбинации из n элементов по k?
2. Как обозначают и как вычисляют количество комбинаций из n элементов по k?
3. Что такое бином? А бином Ньютона?
4. Что такое треугольник Паскаля? Как его строят?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. В турнире по шашкам приняли участие 5 девушек и 7 юношей. Каждый участник сыграл один раз с каждым другим. Сколько партий было: а) между девушками; б) между юношами; в) между юношами и девушками?

Р е ш е н и е. а) Речь идёт о 2-элементных подмножествах (неупорядоченных) множества, состоящего из 5 элементов. Это — комбинации. $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. б) Аналогично $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$.

в) Воспользуемся правилом умножения. Поскольку каждой из 5 девушек предстоит сыграть с каждым из 7 юношей, возможных случаев $5 \cdot 7 = 35$.

2. Для дежурства в столовой приглашают 3-х учеников из 7 класса и 2-х учеников из 10 класса. Сколькими способами это можно сделать, если в 7 классе учится 24 ученика, а в 10 классе — 18.

Р е ш е н и е. Речь идёт о неупорядоченных подмножествах двух разных множеств. Это — комбинации.

$$C_{24}^3 = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2024; \qquad C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153.$$

По правилу произведения имеем $2024 \cdot 153 = 309\,672$ способов выбрать учащихся для дежурства.

3. Сколько разных делителей имеет число 1001?

Р е ш е н и е. Разложим заданное число на простые множители: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Если число d — делитель числа 1001, то оно должно быть одним из чисел 7, 11,13 (три случая) или любым их произведением. Различных произведений может быть $C_3^2 + C_3^3 = 3 + 1 = 4$. Делителем данного числа есть ещё единица.

Следовательно, число 1001 имеет $3 + 4 + 1 = 8$ делителей.

4. Докажите, что выпуклый n-угольник имеет $0{,}5n(n-3)$ диагоналей.

Р е ш е н и е. Отрезков, концами которых являются n вершин данного n-угольника, существует C_n^2. Среди них есть и n сторон данного n-угольника. Поэтому диагоналей он имеет $C_n^2 - n = 0{,}5n(n-1) - n = 0{,}5n(n-3)$.

5. Докажите тождество
$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.
Сделайте обобщение.

Р е ш е н и е. $(a-b)^5 = (a + (-b))^5 =$
$= a^5 + 5a^4 \cdot (-b) + 10a^3 \cdot (-b)^2 + 10a^2 \cdot (-b)^3 + 5a \cdot (-b)^4 + (-b)^5 =$
$= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

Все члены разложения бинома Ньютона $(a-b)^n$ такие же, как и члены разложения бинома $(a+b)^n$, только их члены с чётными номерами отрицательные.

6. Найдите номер члена разложения $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{15}$, который не содержит x.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой общего члена разложения бинома. Имеем:

$$T_{k+1} = C_{15}^k x^{15-k} (x^{-2})^k = C_{15}^k x^{15-3k}.$$

По условию задачи $x^{15-3k} = 1$, то есть $15 - 3k = 0$. Отсюда $k = 5$. Следовательно, не содержит x шестой член разложения бинома.

Выполните устно

1158. Составьте все возможные комбинации из букв α, β, γ по 2.

1159. Вычислите C_5^1, C_5^5, C_5^0.

1160. Сколькими способами можно выбрать две конфеты из трёх?

1161. Сколько членов имеет разложение бинома $(a+1)^5$?

1162. При каком условии разложение бинома $(a+b)^n$ имеет чётное число членов, при каком — нечётное число членов?

Уровень А

1163. На полке есть 20 книг. Сколькими способами можно выбрать две из них?

1164. В классе 32 ученика. Сколькими способами можно выбрать из них двух дежурных?

1165. В соревнованиях участвует 12 человек. Сколько существует способов занять призовое место (1-е, 2-е или 3-е)?

1166. Сколькими способами можно распределить 6 одинаковых шоколадок между тремя детьми, чтобы каждый ребёнок получил 2 шоколадки? А если все шоколадки разные?

1167. Сколькими способами можно распределить 4 одинаковые путёвки между 20 рабочими? А если все путёвки разные?

1168. Вычислите:

а) C_9^3; б) C_{10}^7; в) $C_{12}^{10} : P_3$;

г) $A_{10}^2 - C_{10}^2$; д) $C_{20}^2 - C_{20}^3$; е) $C_{30}^2 - C_{30}^{28}$.

1169. Сколько различных правильных дробей можно написать так, чтобы одно из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 было числителем, а второе — знаменателем?

1170. Сколько существует: а) отрезков, концами которых являются n данных точек; б) треугольников, вершинами которых являются вершины данного правильного n-угольника? Вычислите, если $n = 8; 10; 12$.

1171. Сколько диагоналей имеет выпуклый 10-угольник?

1172. В классе 32 ученика. Сколькими способами можно сформировать команду из 5 человек для участия в математической олимпиаде? А если известно, что в команде точно будет Оля?

Уровень Б

1173. Для опыта взяли 3 белых, 5 красных и 7 розовых цветков гороха из имеющихся 10-ти белых, 10-ти красных и 10-ти розовых цветков. Сколькими способами это можно сделать?

1174. Запишите в виде многочлена выражение:

а) $(x+c)^4$; б) $(a+1)^5$; в) $(2+c)^5$; г) $(x-2)^7$;

д) $(x+1)^6+(x-1)^6$; е) $(m+n)^5-(m-n)^5$.

1175. Сколько разных делителей имеет число 1110?

1176. Сколько разных произведений, кратных 10, можно получить из чисел 2, 3, 5, 7, 11?

1177. Сколько можно составить из простых делителей числа 2730 составных чисел, которые имеют только два простых делителя?

1178. Сколькими способами можно группу из 17 учеников разделить на две группы так, чтобы в одной группе было 5 человек, а во второй — 12?

1179. На одной из двух параллельных прямых даны три точки, а на второй — четыре (*рис. 141*). Сколько существует различных треугольников с вершинами в этих семи точках?

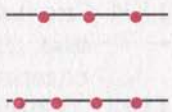


Рис. 141

1180. У одного мальчика есть 10 марок для обмена, а у второго — 8. Сколькими способами они могут обменять две марки одного на две марки второго?

1181. На одной параллельной прямой обозначено 7 точек, а на второй — 12. Сколько существует четырёхугольников с вершинами в этих точках?

1182. В баскетбольной команде, состоящей из 15 человек, нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

1183. Решите уравнение:

а) $C_x^2=21$; б) $C_x^2=20+x$; в) $C_x^2+C_x^3=15(x-1)$.

Уровень В

1184. Докажите, что если числа m, n — натуральные и $m>n$, то:

а) $C_m^n=C_m^{m-n}$; б) $C_m^n=C_{m-1}^n+C_{m-1}^{n-1}$, $n>1$;

в) $C_m^0+C_m^1+C_m^2+\ldots+C_m^{m-1}+C_m^m=2^m$;

г) $C_2^2+C_3^2+C_4^2+\ldots+C_{m-1}^2+C_m^2=C_{m+1}^3$.

1185. Сколькими способами можно раздать 28 пластинок домино четырём игрокам, чтобы каждому досталось 7 пластинок?

1186. Сколько различных диагоналей может иметь правильный n-угольник?

1187. Когда игрок имеет больше шансов выиграть:

а) угадать 1 число из шести или 2 числа из четырёх;
б) угадать 3 числа из двадцати или 2 из сорока;
в) угадать 6 чисел из 49 или 5 из 36?

1188. Сколькими способами можно разбить группу из 12 туристов: а) на подгруппы по 3 туриста в каждой; б) на подгруппы по 2 туриста?

1189. Есть 20 лотерейных билетов с номерами от 1 до 20. Сколькими способами из них можно выбрать 3 билета так, чтобы номер хотя бы одного из них был больше 15?

1190. Сколько диагоналей есть в выпуклом многограннике, имеющем n вершин, если все его грани:
а) треугольники (*рис. 142*); б) пятиугольники (*рис. 143*)?

1191. Сколько разных аккордов можно взять на десяти выбранных клавишах синтезатора, если каждый аккорд может содержать от трёх до десяти звуков?

1192. Из 20 сотрудников издательства 5 человек приглашены на международную книжную выставку. Сколько может быть различных составов отъезжающей группы, если директор издательства и два его заместителя одновременно выехать не могут?

1193. В магазине есть 50 видов молочных продуктов, включая сыворотку. Хозяйка хочет купить 4 различных вида этих продуктов. Сколькими способами она может это сделать, если: а) она не собирается покупать сыворотку; б) если она обязательно покупает сыворотку; в) если она не имеет приоритетов?

1194. На одной из параллельных прямых отмечено 10 точек, а на другой — 7 точек. Каждую точку одной прямой соединили отрезком с каждой точкой другой прямой. Найдите чис-

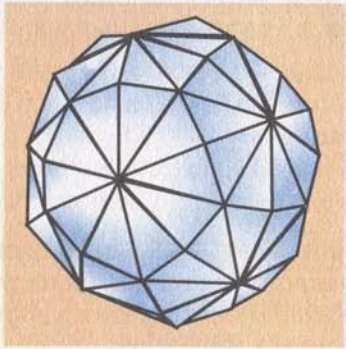


Рис. 142

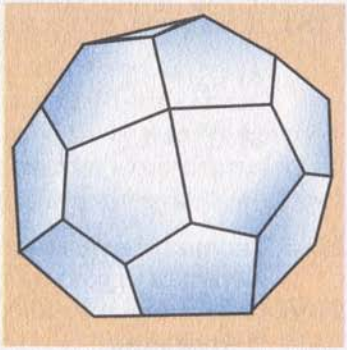


Рис. 143

ло точек пересечения полученных отрезков, если известно, что никакие три отрезка не имеют общих точек (общие точки на концах отрезков не учитывать).

1195. В биномиальном разложении $(x^{1,5} + x^{-4})^n$ найдите номер члена, который не содержит x, если: а) коэффициент третьего члена на 44 больше коэффициента второго члена; б) коэффициент четвёртого члена так относится к коэффициенту третьего, как 8 : 3.

1196. Найдите сумму рациональных членов разложения $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{10}$.

Упражнения для повторения

1197. Выполните действия:

а) $\left(1\frac{8}{13}:3\frac{3}{13}+\frac{5}{7}:\frac{8}{21}\right):\left(8\frac{1}{8}+3\frac{1}{2}\right)$;

б) $\left(28\frac{4}{5}:13\frac{5}{7}+6\frac{3}{5}:\frac{2}{3}\right):\left(1\frac{11}{16}:2\frac{1}{4}\right)$.

1198. Является ли число 384 членом геометрической прогрессии:

а) 3, 6, ... ; б) $\frac{4}{81}, \frac{8}{27}, \dots$?

1199. Докажите, что при любом значении $a > 1$ число $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}$ является отрицательным.

§ 33. СВЕДЕНИЯ О СТАТИСТИКЕ

Статистика — это наука, которая занимается сбором, обработкой и изучением различных данных, связанных с массовыми явлениями, процессами и событиями. Статистические сведения о какой-то большой совокупности объектов (генеральной совокупности) получают в основном в результате анализа только незначительной её части — *выборки*. Чтобы узнать, например, о наиболее распространённом размере мужской обуви, достаточно опросить несколько десятков мужчин. Предположим, что, опросив 60 мужчин, получили результаты, приведённые в таблице:

Размер обуви	25	25,5	26	26,5	27	27,5	28	28,5	29	29,5	30	30,5
Количество мужчин	1	2	3	7	10	9	8	8	6	4	1	1

Это — *частотная таблица*, в ней числа второй строки — *частоты*. Например, частота обуви размера 29 равна 6. Относительная частота этого размера

$6 : 60 = 0{,}1 = 10\ \%$.

Проанализировав такую выборку, делают общий вывод: примерно 10 % мужской обуви надо делать 29 размера, а размера 26 — вдвое меньше. Это — приближённые отношения, но для практики таких приближений бывает достаточно.

Математическим анализом различных выборок занимается *математическая статистика*. Её основная задача — разрабатывать эффективные методы изучения больших совокупностей объектов на основе сравнительно небольших выборок.

Каждый элемент выборки называют её *вариантой*. Выборка, полученная в результате наблюдений, бывает неупорядоченной. Упорядочив её, получают *вариационный ряд*. Разность между крайними членами вариационного ряда — *размах выборки*. Пусть дано выборку

4, 3, 7, 9, 6, 8, 2, 6, 1, 7, 7, 3, 2, 5.

Упорядочив её по возрастанию вариант, получим вариационный ряд:

1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9.

Размах данной выборки $r = 9 - 1 = 8$.

Мода выборки **— её варианта с наибольшей частотой (обозначается Mo).** ***Медиана выборки*** **— число, которое «разделяет» соответствующий вариационный ряд пополам (обозначается Me).**

Следовательно, для данной выборки $Mo = 7$; $Me = \frac{1}{2}(5 + 6) = 5{,}5$.

Средним значением выборки **называют середнее арифметическое всех её вариант.**

Например, если дано выборку 1, 2, 3, 3, 5, 6, 8, то её среднее значение

$$\bar{x} = \frac{1}{7}(1+2+3+3+5+6+8) = 4.$$

Если варианты выборки повторяются, то суммы равных слагаемых можно заменить произведениями.

З а д а ч а. 7 рабочих бригады ежемесячно получают по 3000 грн, 8 — по 4500 грн, а 5 — по 5000 грн. Определите среднюю месячную зарплату рабочего этой бригады.

Р е ш е н и е. Всего рабочих в бригаде $7 + 8 + 5 = 20$. Поэтому искомая средняя зарплата

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(3000 \cdot 7 + 4500 \cdot 8 + 5000 \cdot 5) = 4100.$$

О т в е т. 4100 грн.

Моду, медиану и среднее значение выборки называют *центральными тенденциями выборки*.

В статистике часто используют и *среднее квадратичное*. Если дано n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то их среднее квадратичное σ определяется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)}.$$

С помощью среднего квадратичного чаще оценивают совокупности погрешностей или отклонений от нормы. Рассмотрим пример. Желая выточить деталь радиуса R, токарь практически вытачивает деталь радиуса $R + \alpha$, где α — некоторое отклонение (положительное или отрицательное). Пусть два токаря, выточив по 6 таких деталей, допустили такие ошибки (в десятых долях миллиметра):

первый: 2, −5, 4, −3, −3, 5;

второй: 3, −1, 4, 1, 1, 2.

Кто из них выполнил задание качественнее?

Чтобы ответить на вопрос, вычисляют средние квадратичные допущенных отклонений:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{6}(4 + 25 + 16 + 9 + 9 + 25)} = \sqrt{14{,}7} \approx 3{,}8;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{6}(9 + 1 + 16 + 1 + 1 + 4)} = \sqrt{5{,}3} \approx 2{,}3.$$

Качественнее работу выполнил второй токарь.

Если разности между вариантами выборки и её средним значением равны $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то среднее арифметическое их квадратов называется *дисперсией* выборки (лат. dispersio —

рассеяние). Дисперсия равна квадрату среднего квадратичного всех отклонений и вычисляется по формуле:

$$D=\frac{1}{n}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\right).$$

Подробнее о дисперсии см. на с. 325.

В математике, в частности в математической статистике, нередко используют также среднее геометрическое ($S_{геом}$) и среднее гармоническое ($S_{гарм}$), вычисляемые по формулам:

$$S_{геом}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\ ;\quad S_{гарм}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Для любого количества положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ всегда справедливы неравенства

$$S_{гарм}\le S_{геом}\le \bar{S}\le \sigma.$$

Например, для положительных чисел a и b всегда

$$\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Докажите эти неравенства и приведите их геометрическую модель.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое варианта выборки, вариационный ряд?
2. Что такое частотная таблица?
3. Что такое мода, медиана, среднее значение выборки?
4. Как вычисляют среднее квадратичное n чисел?
5. Что такое дисперсия и как её вычисляют?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. В результате выборочного анализа выручки (в тыс. грн) туристической фирмы за неделю получили выборку объёмом $n = 40$:

87	94	99	90	90	87	85	87
90	94	87	87	82	90	94	90
85	85	87	94	81	82	87	97
90	94	85	81	87	85	90	82
94	90	94	82	97	81	85	87

Для заданной выборки: а) найдите размах выборки; б) составьте частотную таблицу.

Р е ш е н и е. а) Выпишем различные значения вариант, попавших в выборку: 87, 94, 99, 90, 85, 82, 81, 97.

Разместим варианты выборки в порядке возрастания: 81, 82, 85, 87, 90, 94, 97, 99.

Размах выборки равен 99 – 81 = 18.

б) Вычислим частоту каждой варианты и составим частотную таблицу:

x_i	81	82	85	87	90	94	97	99
n_i	3	4	6	9	8	7	2	1

2. В результате анализа производства мяса (тыс. т) в январе—октябре 2010 года во всех областях Украины получили такую совокупность данных.

166, 73, 90, 206, 115, 52, 50, 63, 73, 211, 47, 47, 129, 34, 50, 52, 55, 44, 41, 90, 55, 50, 363, 47, 47.

Найдите: моду, медиану и размах выборки.

Р е ш е н и е. Разместим варианты выборки в порядке возрастания: 34, 41, 44, 47, 47, 47,47, 50, 50, 50, 52, 52, 55, 55, 63, 73, 73, 90, 90, 115, 129, 166, 206, 211, 363.

Тогда мода выборки равна 47 (встречается 4 раза), медиана — 55 (имеет 13-й порядковый номер из 25), а размах — 329 (363 — 34).

Выполните устно

1200. Найдите моду и медиану выборки из 20 вариант:

а) –1, –1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8;

б) 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 11, 11, 11.

1201. Найдите среднее значение выборки:

а) –10, –9, –8, –7, 0, 6, 7, 8, 9, 10, 11;

б) 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0.

Уровень А

1202. В таблице представлены средние значения влажности (в %) в городе Киеве за каждый из 12 месяцев. Найдите моду, медиану и размах данной выборки.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
82	80	76	67	63	69	72	70	75	78	84	86

1203. Найдите моду и медиану выборки 28, 29, 29, 30, 31, 32, 32, 32, 32, 33.

1204. Дано выборку 3, 1, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 1, 2, 1. Постройте соответствующий ей вариационный ряд; найдите размах, моду и медиану выборки.

1205. Пользуясь приведённой на с. 294 частотной таблицей, определите:

а) частоту и относительную частоту варианты, которая соответствует размеру 26;

б) во сколько раз обуви размера 26 следует производить меньше, чем размера 27,5.

1206. Выборка включает все натуральные числа меньше 10, а кроме того, числа 6, 8, 8 и 13. Постройте её вариационный ряд. Найдите размах выборки, её моду и медиану.

1207. Варианты 1, 2, 3, 4, 5 выборки имеют частоты 3, 4, 6, 2 и 3 соответственно, а всего выборка имеет 18 вариант. Найдите её размах, моду и медиану.

Уровень Б

1208. За экзаменационную работу по математике получили 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12 баллов соответственно 2, 9, 8, 10, 20, 17, 4, 6 и 4 абитуриента. Составьте частотную таблицу и вычислите относительные частоты баллов, которые встречались наиболее редко и наиболее часто.

1209. Во время медицинского обследования кровяного давления у курсантов (в условиях учебной нагрузки) получены следующие результаты:

x_i	112	114	116	118	120	122	124	126	128	130
n_i	5	20	30	40	40	30	20	10	3	2

Найдите центральные тенденции выборки.

1210. Во время испытаний самолёта «Антей» в зависимости от направления и скорости ветра были зафиксированы следующие результаты скорости (км / ч) отрыва самолета:

235 231 234 239 238 232 237 239 230 240
231 238 239 235 233 233 240 234 239 240
230 230 232 240 230 234 240 235 239 236

Постройте вариационный ряд и частотную таблицу данной выборки.

1211. Выберите по отрывку (1 страница) художественного произведения двух разных авторов, прочитайте их. Для букв

«а», «б», «н», «о», «ч», «я» составьте частотные таблицы их наличия в избранных отрывках. Проанализируйте их.

1212. Выборка включает все натуральные числа, больше 20, но меньше 50, а кроме того, числа 13, 31, 31 и 32. Найдите её моду, медиану и среднее значение.

1213. Найдите среднее арифметическое:
а) всех натуральных чисел, не больше 100;
б) всех целых чисел x, таких, что $-10 \le x \le 110$.

1214. Выборка содержит 60 чисел; из них число 3 встречается 10 раз, 4 — 20 раз и 5 — 30 раз. Найдите среднее значение, моду и медиану.

Уровень В

1215. Три токаря в течение 6 ч изготавливали одинаковые детали. Первый одну деталь изготавливал за 30 мин, второй — за 36 мин, третий — за 40 мин. Составьте соответствующую таблицу статистического распределения. Определите, сколько времени в среднем затрачивал один токарь на изготовление одной детали.

1216. В течение 5 дней массы десяти бычков увеличились соответственно на 2,5; 3,0; 2,8; 2,7; 2,7; 2,8; 2,0; 2,4; 2,6 и 2,9 кг. Найдите средний дневной привес одного бычка.

1217. Правильно ли, что сумма разностей между всеми вариантами выборки и её средним значением равна нулю? Приведите примеры. Обоснуйте.

1218. Найдите средний процент бракованных изделий, пользуясь такой таблицей:

Партия товара	Количество, шт.	Процент бракованных изделий	Количество бракованных изделий, шт.
I	2000	3,40	68
II	1420	2,46	35
III	408	0,49	2
Всего	3828		105

1219. Сумму n чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ обозначают символом $\sum_{i=1}^{n} a_i$ (знак суммы $\sum$ — сигма большая). Запишите с помощью этого знака средние: арифметическое, квадратичное и гармоническое.

1220. Три фрезеровщика изготовили по 5 одинаковых деталей длиной 235 мм, допустив соответственно такие погрешности (в мм):
I: 0,2; −0,2; −0,5; 0,3; 0,4;
II: 0,1; 0,5; −0,2; −0,4; 0,5;
III: 0,5; −0,1; −0,4; 0,3; 0,4.
Найдите среднее квадратичное допущенных ими погрешностей и их дисперсию. Кто выполнил задание лучше?

1221. По статистическим материалам вашей местности составьте три разные задачи и решите их.

Упражнения для повторения

1222. Запишите уравнение касательной в точке $x_0 = 1$ к графику функции $y = 2x^3 - x + 1$.

1223. Цена на автомобиль сначала повысилась на 10 %, а затем снизилась на 10%. Как изменилась цена после двух переоценок?

1224. Постройте график функции:
а) $y = x + 2$; б) $y = x^2 + 2$; в) $y = -x + 2$; г) $y = -x^2 + 2$.

§ 34. ГРАФИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ О ВЫБОРКЕ

Статистические данные сводят в таблицы. Статистическая таблица — это особая форма рационального и систематизированного изложения обобщающих характеристик статистической совокупности. Как и грамматическое предложение, статистическая таблица имеет *подлежащее* и *сказуемое*. В подлежащем приводится перечень элементов, явлений, признаков, указанных в таблице. В сказуемом таблицы подаются количественные характеристики. Например, в приведённой ниже таблице сбора зерна в некоторых странах в 1995 г. подлежащим является левая колонка. Числовые данные в других — сказуемое таблицы.

Страна	Пшеница	Рожь	Ячмень	Всего
Китай	101	0,6	—	400
США	67	6,3	9,9	353
Россия	46	13,9	25,5	103
Франция	33	—	10,5	60
Германия	16	2,4	12,2	35
Украина	19	1,2	10,1	34

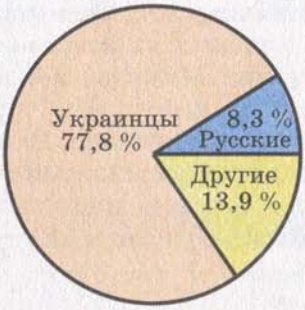


Рис. 144

Рис. 145

Информацию о той или иной выборке часто подают графически, чаще всего в форме диаграмм. Слово *диаграмма* в переводе с греческого означает рисунок, чертёж. Правда, теперь этим словом называют не любой рисунок, а схематическое изображение отношений между множествами, различные структуры, алгоритмы действий и т. д. Отношения (соотношения) между множествами и объёмами понятий зачастую изображают в виде диаграмм-деревьев или диаграмм Эйлера (*рис. 137, 135*).

Структуры моделей, различные диаграммы классов, состояний удобно подавать в виде круговых (секторных) диаграмм.

На рисунках 144 и 145 на секторной и столбчатой диаграммах изображены соотношения между численностью граждан Украины разных национальностей (согласно переписи 2001 г.).

Столбчатую диаграмму из соединённых прямоугольников называют *гистограммой*. На рисунке 146 изображена гистограмма, которая соответствует приведённой ниже таблице распределения рабочих цеха по тарифным разрядам.

Тарифный разряд	1	2	3	4	5	6	Всего
Число рабочих	2	2	5	15	20	6	50

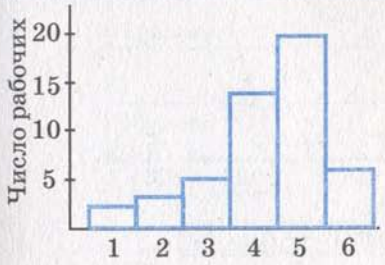


Рис. 146

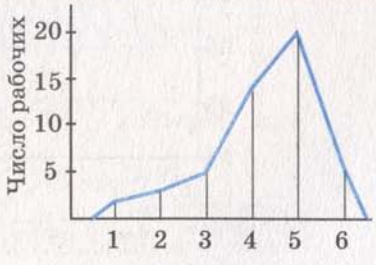


Рис. 147

Иногда вместо гистограммы строят *полигон распределения*, соединяя отрезками середины верхних оснований последовательных прямоугольников гистограммы (*рис. 147*). Бывают и другие диаграммы.

Информацию о динамике того или иного явления графически удобно изображать с помощью столбчатых диаграмм или графиков. Например, на рисунке 148 приведена диаграмма динамики рождаемости в Украине от 1960 до 2002 года; на рисунке 149 —

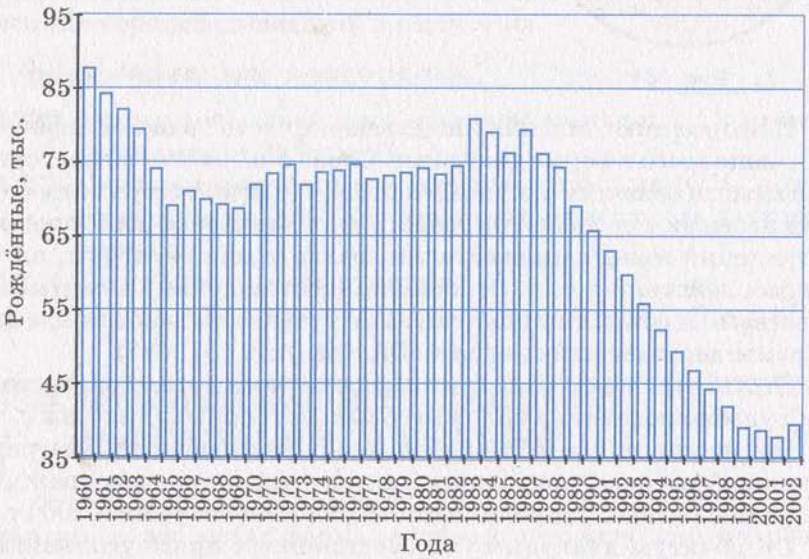


Рис. 148

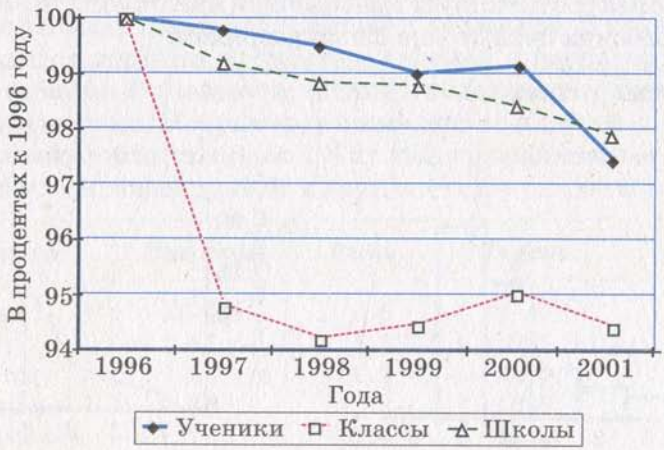


Рис. 149

графики, отражающие динамику количества учеников, классов и школ в сёлах Украины.

В социологии диаграммы часто строят на основе полярной системы координат. На двух следующих диаграммах (*рис. 150, 151*) большим расстояниям от полюса 0 соответствуют большие значения величин. Проанализируйте эти диаграммы.

Рис. 150

Рис. 151

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Какие способы представления сведений вы знаете?
2. Опишите структуру статистической таблицы.
3. Какие виды диаграмм вы знаете?
4. Что такое гистограмма?
5. Что такое полигон распределения?
6. Что используют для построения таблиц, графиков и диаграмм?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. По данным таблицы «Структура валового сбора зерновых культур в мире (%)» постройте секторную диаграмму.

Пшеница	Рис	Кукуруза	Ячмень	Овёс	Рожь	Другие
1	2	3	4	5	6	7
28	26	25	10	2	2	7

Р е ш е н и е. На 100 % приходится 360°, а на 1 % — 3,6°. Умножив 3,6° на данные таблицы, получим: 100,8°; 93,6°; 90°; 36°; 7,2°; 7,2°; 25,2°. Построив центральные углы с соответствующими градусными мерами, получим нужную диаграмму (*рис. 152*). Достаточно просто построить такую диаграмму с помощью программы Microsoft Graf (через команды Вставка / Объект / Диаграмма Microsoft Graf)или программы Excel.

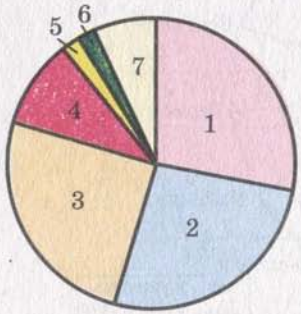


Рис. 152

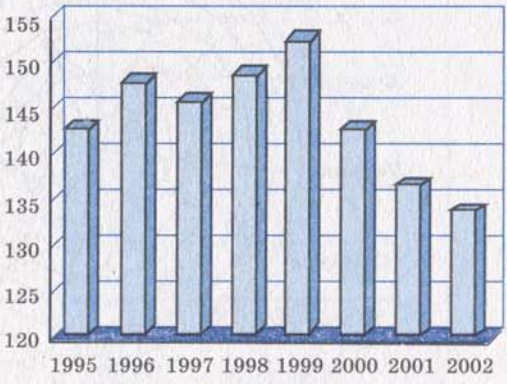


Рис. 153

Выполните устно

1225. На рисунке 153 изображена диаграмма, представляющая динамику потребления воды на душу населения (литров в сутки) в Черниговской области. Как называется такая диаграмма? Почему, по вашему мнению, уменьшается потребление питьевой воды?

1226. На рисунке 154 изображена диаграмма, представляющая экспорт и импорт швейной продукции в Украине в денежном выражении за 2007 г. Как называются такие диаграммы? Проанализируйте данные, представленные на них. Какой вывод можно сделать?

1227. Проанализируйте таблицу, в которой представлены результаты победителей на летних параолимпийских играх 2008 года. Ответьте на вопросы:

1) сколько медалей получили спортсмены Украины;

Результаты победителей на летних параолимпийских играх 2008 г.

Место	Страна	Золото	Серебро	Бронза	Всего
1	КНР	89	70	52	211
2	Великобритания	42	29	31	102
3	США	36	35	28	99
4	Украина	24	18	32	74
5	Австралия	23	29	27	79
6	ЮАР	21	33	6	30
7	Канада	19	10	21	50
8	Россия	18	23	22	63
9	Бразилия	16	14	17	47
10	Испания	15	21	22	58

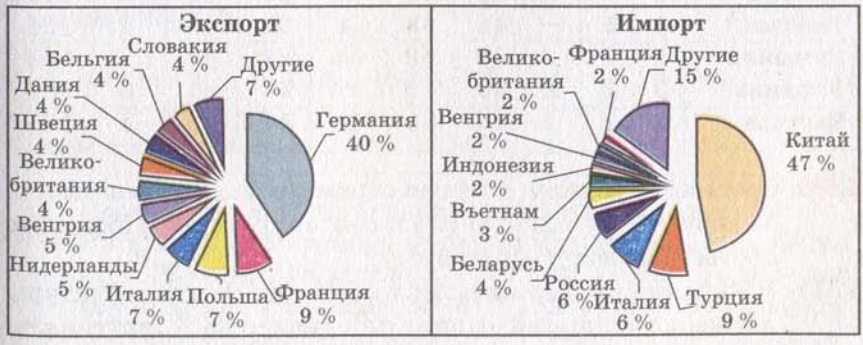


Рис. 154

2) спортсмены каких стран получили одинаковое количество серебряных (бронзовых) медалей;
3) спортсмены каких стран получили наименьшее количество серебряных (бронзовых) медалей?

Уровень А

1228. Постройте таблицу по данным рисунка 154. Укажите её подлежащее и сказуемое.

1229. В таблице приведены результаты выступлений лучших команд на 50-й международной математической олимпиаде (2009 г., Германия, более 100 стран мира). Проанализируйте данные таблицы. Для каждой из шести олимпиадных задач установите среднее значение результатов. По полученным данным постройте график.

Страна	Медали			Результаты по задачам						Σ
	З	С	Б	1	2	3	4	5	6	
Китай	6	—	—	42	42	42	42	42	11	221
Япония	5	—	1	42	42	34	33	42	19	212
Россия	5	1	—	42	39	31	42	42	7	203
Южн. Корея	3	3	—	42	42	22	40	42	0	188
КНДР	3	2	1	42	35	24	39	36	7	183
США	2	4	—	42	42	20	33	42	3	182
Таиланд	1	5	—	42	42	17	40	40	0	181
Турция	2	4	—	42	42	23	32	38	0	177
Германия	1	4	1	42	33	11	38	37	10	171
Беларусь	1	4	1	37	34	15	39	42	0	167
Италия	2	2	2	42	38	18	29	38	0	165
Тайвань	1	5	—	42	38	4	35	42	4	165
Румыния	2	2	2	39	42	15	28	36	3	163
Украина	3	1	2	36	42	14	33	31	6	162
Вьетнам	2	2	2	36	38	16	37	30	4	161

1230. Составьте таблицу, которая отражает вашу успеваемость за первое полугодие: а) 10 класса; б) 11 класса. Постройте соответствующую диаграмму.

1231. В Украине придерживаются примерно такой структуры посевных площадей: озимая пшеница — 23 %, другие зерновые культуры — 22 %, кормовые культуры — 37 %,

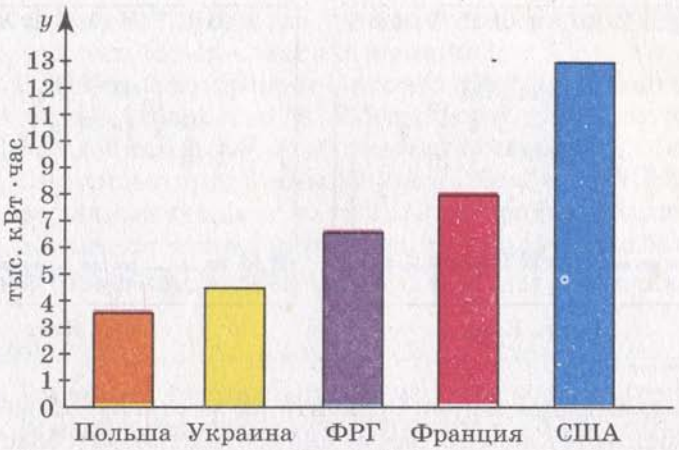


Рис. 155

технические культуры — 12 %, картофель и овощи — 6 %. Постройте соответствующую секторную диаграмму.

1232. Прочитайте диаграмму производства электроэнергии на человека (кВт · ч) в некоторых странах в 1992 г. (*рис. 155*). Составьте соответствующую таблицу. Выясните состояние производства электроэнергии в этих же странах в 1995, 2000, 2005 годах. Поместите их в таблицу и на основе этих данных постройте столбчатые диаграммы.

1233. Постройте столбчатые диаграммы по данным (в тыс. человек) о количестве жителей крупнейших городов Украины (2001 г.):

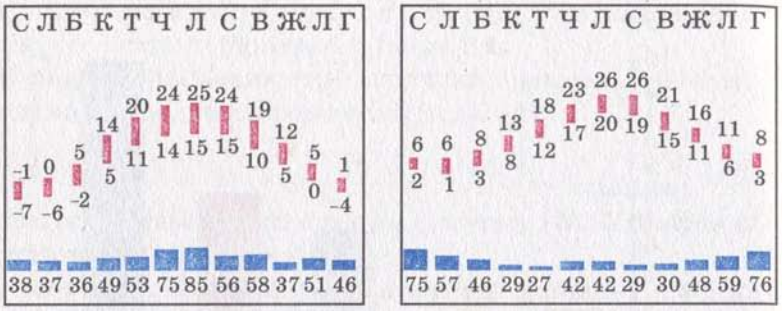
Киев — 2629; Донецк — 1042;
Харьков — 1490; Днепропетровск — 1094;
Одесса — 1002; Запорожье — 840.

1234. Юноши-старшеклассники одной школы по росту распределены так:

Рост, см	150	155	160	165	170	175	180
Количество юношей	1	4	5	15	25	8	2

Постройте соответствующую гистограмму и полигон.

1235. На рисунке 156 изображены климатограммы для Киева (*а*) и Ялты (*б*), на которых для каждого месяца дана информация о сумме осадков (в мм, голубой цвет) и средней температуре (в °С, красный цвет). Охарактеризуйте эти диаграммы. Укажите как можно больше общих и отличи-



а) г. Киев *б*) г. Ялта

Рис. 156

тельных признаков. Сравните их за отдельные месяцы. Составьте климатограмму для вашего города (области).

Уровень Б

1236. Пользуясь сведениями, представленными в таблице на с. 300, постройте несколько столбчатых диаграмм и дайте название каждой из них. Составьте аналогичную таблицу за один из годов XXI века и на её основе постройте несколько диаграмм.

1237. Проанализируйте диаграммы, представленные на рисунке 154. Ответьте на вопросы:

а) какие страны являются крупнейшими импортёрами (экспортёрами) швейной продукции для Украины;

б) для каких стран Украина одновременно является импортёром и экспортёром швейной продукции?

Постройте в одной системе координат полигон распределения импорта и экспорта швейной продукции в Украине (для стран из пункта б).

1238. Проанализируйте диаграмму, представленную на рисунке 150. Постройте частотную таблицу по этим данным. Найдите моду, медиану и размах выборки. Ответьте на вопросы:

а) в какой области была в это время наименьшая заработная плата;

б) сколько областей имели среднюю заработную плату на уровне 1000 грн?

1239. Проанализируйте диаграмму, представленную на рисунке 151. Постройте частотную таблицу по этим данным. Найдите моду, медиану и размах выборки. Ответьте на вопросы:

а) в каких странах уровень безработицы наименьший, а в каких — наибольший;

б) имеются ли страны, уровень безработицы в которых для мужчин больше, чем для женщин?

1240. С помощью программы Microsoft (Graf или Excel) на основе данных таблицы из № 1229 постройте график, который для каждой страны задаёт общее количество баллов победителей.

1241. С помощью программы Microsoft (Graf или Excel) на основе данных таблицы из № 1229 постройте диаграммы, которые для каждой страны задают количество баллов, полученных за решение задач 3 и 6.

Уровень В

1242. Главными составляющими частями воздуха (недалеко от земной поверхности) является азот — 78,08 % объёма, кислород — 20,96 % объёма и инертные газы — 0,94 % объёма. Количество этих газов в воздухе не изменяется, поэтому их называют постоянными составляющими частями воздуха. Постройте секторную диаграмму состава воздуха. Установите, какой процент объёма занимают другие газы.

1243. В таблице приведён состав молока некоторых млекопитающих. Для каждого вида млекопитающих постройте секторную диаграмму. Какой вид графического представления информации лучше покажет различия в составе молока? Выполните такое изображение.

Составляющие (%)	Корова	Овца	Коза	Кобыла	Сев. олень
Вода	87,5	82,7	86,6	90,1	66,9
Углеводы	4,8	6,3	3,9	5,9	2,8
Жир	3,5—4,2	5,3	3,7	1,5	16,9
Белок	3,5	4,6	4,2	2,1	16,9
Микроэлементы	0,7	0,9	0,8	0,4	1,2

1244. На рисунке 157 представлено динамику количества общеобразовательных школ-интернатов, специальных общеобразовательных школ и количества учащихся в них. Проанализируйте эти диаграммы и графики. Как изменялось от 1996 года до 2001 года количество: а) общеобразовательных школ-интернатов; б) учащихся общеобразовательных школ-интернатов; в) специальных ООШ? На сколько ежегодно? Подберите данные, касающиеся динамики количества общеобразовательных школ и числа учащихся в них в течение 2001—2005 гг.

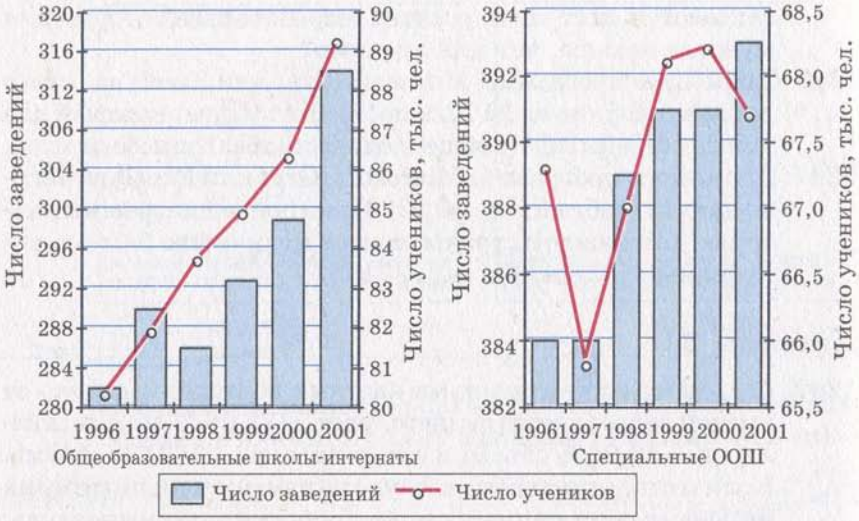


Рис. 157

1245. За данными таблицы № 1229 составьте выборку, которая для каждой страны из таблицы задаёт количество баллов за решение каждой задачи. Постройте вариационный ряд и частотную таблицу для этой выборки. Найдите моду, медиану и размах выборки.

1246. Урожайность пшеницы (в ц/га) на разных участках поля (в %) фермы приведена в таблице.

Урожайность	20–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50
Доля площади	6	15	33	21	20	5

Постройте соответствующую гистограмму и полигон. Найдите среднюю урожайность пшеницы для данной фермы.

1247. На рисунке 158 изображена половозрастная пирамида населения Украины по данным Всеукраинской переписи населения 2001 года. Какие сведения на ней обозначены красным цветом? Сравните её с диаграммой, изображённой на рисунке 148, сделайте соответствующие выводы. Составьте интервальную частотную таблицу с длиной интервала в 10 лет. Найдите данные и постройте диаграмму «Динамика рождаемости в Украине за 2002—2010 годы».

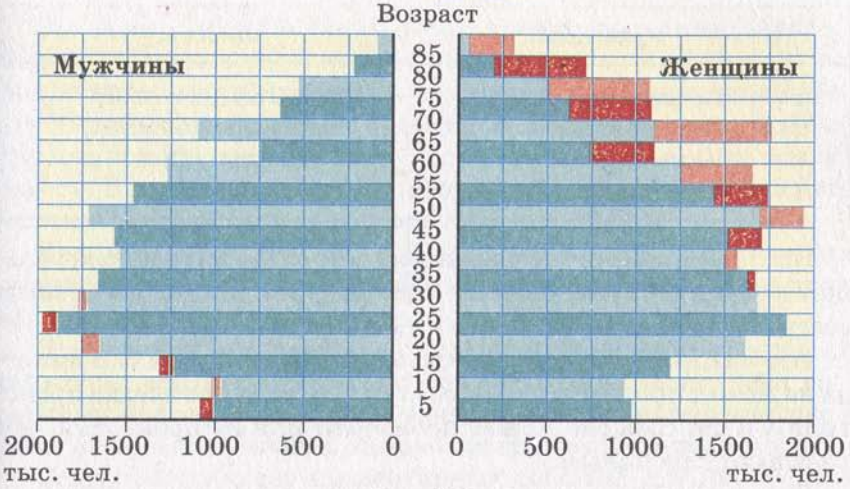


Рис. 158

Упражнения для повторения

1248. Найдите одну из первообразных для функции:

а) $y = 2x^3 - x$; б) $y = 2 - x^2$; в) $y = 2\sin x$; г) $y = \sin 2x$.

1249. Докажите, что функция $y = 2x^3 - x$ — нечётная, а функция $y = 2 - x^2$ — чётная.

1250. Какое двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр и в 2 раза больше их произведения?

§ 35. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

Построением и исследованием моделей различных процессов, связанных с понятием случайности, занимаются математическая статистика и теория вероятностей. К таким процессам, например, относятся риски (рискованные операции) на производстве и в банковском деле, массовые заболевания среди растений, животных или людей, азартные игры.

Из предыдущих классов вы уже имеете некоторые представления о теории вероятностей, теперь немного расширим и углубим их.

Важнейшими понятиями теории вероятностей являются *вероятностный эксперимент* (испытание, наблюдение), *событие* (следствие испытания) и *вероятность события*. Приведём примеры испытаний и их отдельных последствий — некоторых событий.

	Испытание	Событие
1	Падает монета	Упала вверх гербом
2	Играют команды А и С	Выиграла команда С
3	Человек ждёт весну	Весна наступила
4	Падает игральный кубик	Выпало 0 очков

Последнее событие невозможное, поскольку на гранях игрального кубика нет нуля. Событие 3 достоверное, так как после зимы всегда наступает весна. События 1 и 2 случайные.

Вообще, событие называется *невозможным*, если оно никогда не может произойти, *достоверным* — если оно всегда происходит. Если событие может произойти или не произойти, его называют *случайным*.

Принято считать, что невозможное и достоверное события — частные случаи случайного события.

События обозначают большими латинскими буквами A, B, C, ... , или одной латинской буквой с индексом: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Содержание события подают в фигурных скобках. Например, третье событие из таблицы можно записать так:

$A_3 = \{\text{весна наступила}\}$.

Сказать заранее о случайном событии, что оно состоится или не состоится, нельзя. Если же это событие массовое, выполняется много раз и при одинаковых условиях, то вероятность его наступления можно характеризовать некоторым числом.

Это можно сделать тогда, когда последствия испытаний равновозможные и составляют конечное множество, т.е. в условиях проведённого испытания нет оснований считать появление одного из следствий более или менее возможным, чем других.

Рассмотрим п р и м е р. Бросают один раз правильный однородный игорный кубик (*рис. 159*) и фиксируют количество очков на грани, оказавшейся вверху. Результатом такого испытания могут стать 6 различных событий:

$E_1 = \{\text{выпадет одно очко}\}$;
$E_2 = \{\text{выпадет два очка}\}$;
$E_3 = \{\text{выпадет три очка}\}$;
$E_4 = \{\text{выпадет четыре очка}\}$;
$E_5 = \{\text{выпадет пять очков}\}$;
$E_6 = \{\text{выпадет шесть очков}\}$.

Рис. 159

Эти шесть событий охватывают и исчерпывают все возможные последствия эксперимента. Они *попарно несовместимы*, ибо каждый раз выпадает только одно количество очков. Все шесть событий *одинаково возможны*, поскольку речь идёт об однородном кубике правильной формы и ловкость игрока исключается. В таком случае говорят, что для осуществления каждого из этих событий существует один шанс из шести.

Каждое из событий $E_1 - E_6$ вышеописанного испытания называют элементарным, а всё их множество — пространством элементарных событий.

Элементарным событием называют каждый возможный результат вероятностного эксперимента. Множество всех возможных последствий эксперимента называют *пространством элементарных событий* и обозначают греческой буквой Ω (омега).

Если пространство элементарных событий для некоторого испытания состоит из n равновозможных несовместимых событий, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{n}$. Например, вероятность того, что на подброшенном игорном кубике выпадет 5 очков, равна $\frac{1}{6}$. А вероятность того, что подброшенная монета упадёт вверх гербом, равна $\frac{1}{2}$. Вероятность события A обозначают $P(A)$. Если первое из этих событий обозначить буквой A, а второе — буквой B, то $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$.

Есть события неэлементарные. Рассмотрим, например, такое событие:

C = {появление пластинки домино с 10 очками}.

Поскольку пластинок домино всего 28, то испытание, связанное с выбором одной пластинки, исчерпывается 28 равновозможными и независимыми последствиями. Следовательно, пространство элементарных событий для данного испытания состоит из 28 элементарных событий E_i, где $i = 1,2, \ldots, 28$. Событие C может произойти, если произойдёт одно из двух элементарных событий (*рис. 160*):

1) E_1 = {появление пластинки $\frac{4}{6}$};

2) E_2 = {появление пластинки $\frac{5}{5}$}.

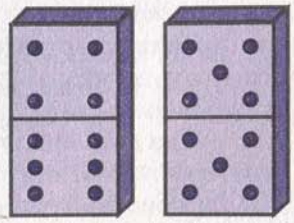


Рис. 160

Говорят, что событию C способствуют два элементарных события (E_1, E_2) из возможных 28, поэтому $P(C) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$.

Рассмотрим общий случай. Пусть испытание имеет конечное количество (n) равновозможных и несовместимых последствий и A — некоторое случайное событие, связанное с данным испытанием.

Будем называть элементарное событие E_n *благоприятным для случайного события* A, если наступление события E_n в результате испытания приводит к наступлению события A.

Если количество последствий (элементарных событий), благоприятных событию A, обозначить через $n(A)$, то вероятность случайного события A определяется по формуле:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Вероятностью случайного события A **называют отношение числа** $n(A)$ **благоприятных для события** A **элементарных событий к числу** n **всех равновозможных и попарно несовместимых элементарных событий, которые образуют пространство элементарных событий для данного испытания.**

Такое определение вероятности называют *классическим*.

Перечислим важнейшие свойства вероятности случайного события.

1. Если C — событие невозможное, то $P(C) = 0$.

2. Если B — событие достоверное, то $P(B) = 1$.

3. Если X — событие случайное, то $0 \le P(X) \le 1$.

4. Если $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ — элементарные события, исчерпывающие некоторое испытание, то

$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n) = 1$.

З а д а ч а. Во время тестирования стиральной машины выяснилось, что одна из пяти деталей a, b, c, d, e имеет дефект. Есть возможность за один раз проверить три детали, которые механик произвольно выбирает из определённых. Чему равна вероятность того, что: а) будет проверена деталь a (событие M); б) будут проверены детали a и b (событие N); в) будет проверена хотя бы одна из деталей a и b (событие K)?

Р е ш е н и е. Построим пространство элементарных событий для данного испытания (из 5 деталей выбирают 3). Имеем:

$abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.$

а) Событию M способствуют 6 элементарных событий из 10: *abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*. Можем найти вероятность события M.

$$P(M) = \frac{n(M)}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

б) Событию N способствуют 3 элементарных события из 10 (*abc*, *abd*, *abe*), поэтому вероятность события N равна $\frac{3}{10}$.

в) Событию K способствуют 9 элементарных событий из 10 (все, кроме *cde*), поэтому вероятность события K равна $\frac{9}{10}$.

Вычислять вероятности событий часто помогают правила и формулы комбинаторики.

З а д а ч а 1. На вершину горы ведут 4 одинаково удобные тропы. Какова вероятность того, что вы поднимитесь на гору и спуститесь с неё тем же маршрутом, которым проходил там ваш товарищ?

Р е ш е н и е. Всего существует $4 \cdot 4 = 16$ различных маршрутов. Поскольку все они одинаково удобны, то вероятность пройтись по одному из них равна $\frac{1}{16}$.

О т в е т. $\frac{1}{16}$.

З а д а ч а 2. Ученик цифрами 1, 2, 3, 4, 5 написал неизвестное вам пятизначное число. Какова вероятность того, что вы сразу отгадаете это число?

Р е ш е н и е. Всего таких чисел есть $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Вероятность угадать одно из них равна $\frac{1}{120}$.

О т в е т. $\frac{1}{120}$.

З а д а ч а 3. В корзине есть 20 яблок, одинаковых на вид, 15 из них — сладкие, а 5 — кислые. Какова вероятность того, что взятые наугад два яблока окажутся кислыми?

Р е ш е н и е. Выбрать пару из всех 20 яблок можно C_{20}^2 способами, а из 5 яблок — C_5^2 способами.

$$C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190, \qquad C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Следовательно, искомая вероятность $P = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$.

З а д а ч а 4. Есть карточки с цифрами 3, 4, 5, 6, 7. Три из них выбирают наугад. Какова вероятность того, что из них можно составить арифметическую прогрессию?

Р е ш е н и е. Три карты из пяти можно выбрать $C_5^3 = 10$ способами. Арифметические прогрессии можно составить только из таких наборов: (3, 4, 5), (4, 5, 6), (5, 6, 7) и (3, 5, 7). Всего этих наборов 4. Следовательно, искомая вероятность $P = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Какие события называют случайными?
2. Приведите примеры случайных событий.
3. Какие события называют невозможными, достоверными?
4. Приведите пример пространства элементарных событий.
5. Какие события называют элементарными? Приведите примеры.
6. Чему равна вероятность достоверного события? А невозможного?
7. Сформулируйте классическое определение вероятности.
8. Как вычисляют вероятности с помощью формул комбинаторики?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Из перевёрнутых 28 костяшек домино наугад берут одну. Какова вероятность того, что на одной из её частей окажется 1 очко (событие A)?

Р е ш е н и е. Подсчитаем, сколько существует костяшек домино, содержащих одно очко: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}$. Их есть 7. Всего возможностей выбора 28, поскольку взять можно любую из 28 костяшек. Следовательно, $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

О т в е т. 0,25.

2. На каждой из четырёх карточек написано одну из букв А, Й, Р, К. Карточки перемешивают и раскладывают в ряд. Какова вероятность того, что образуется слово КРАЙ?

Р е ш е н и е. Из четырёх данных букв можно образовать $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ перестановки. Из них условие задачи удовлетворяет только одна. Следовательно, искомая вероятность $P = \frac{1}{24}$.

О т в е т. $\frac{1}{24}$.

3. На 1000 билетов лотереи приходится 1 выигрыш в 5000 грн, 10 выигрышей по 1000 грн, 50 — по 200 грн, 100 — по 50 грн. Остальные билеты невыигрышные. Найдите вероятность выигрыша на один билет, не менее чем 200 грн.

Р е ш е н и е. Билетов, на которые приходятся выигрыши, не меньше 200 грн, всего $1 + 10 + 50 = 61$. Общее количество билетов 1000. Поэтому искомая вероятность $61 : 1000 = 0{,}061$.

О т в е т. 0,061.

4. Студент пришёл на экзамен, зная ответы только на 20 из 25 вопросов программы. Найдите вероятность того, что он из трёх предложенных вопросов знает ответы минимум на два.

Р е ш е н и е. Всего вариантов троек вопросов C_{25}^3. Из них C_{20}^3 троек таких, на которые он может ответить полностью. Может он ответить и на C_{20}^2 пар вопросов.

Если к каждой такой паре вопросов присоединить один из 5 вопросов, которые он не знает, получим еще $5 \cdot C_{20}^2$ троек. Следовательно, искомая вероятность

$$P = \left(C_{20}^3 + 5 \cdot C_{20}^2\right) : C_{25}^3 = (1140 + 950) : 2300 = \frac{209}{230}.$$

О т в е т. $\frac{209}{230}$.

Выполните устно

1251. Каким с точки зрения теории вероятностей является событие:

а) при падении игрального кубика выпадет шесть очков;

б) лампочка перегорит в кухне;

в) построенный график нечётной функции окажется симметричным относительно начала координат;

г) выбранное наугад двузначное число окажется чётным;

д) температура на Солнце меньше температуры на Земле?

1252. Опишите пространство элементарных событий для данного эксперимента:
а) установление дня рождения произвольно выбранного жителя Украины;
б) определение количества различных корней квадратного уравнения;
в) установление количества общих точек круга и параболы, построенных в одной системе координат;
г) определение одного дополнительного выходного при 6-дневной рабочей неделе.

1253. Какова вероятность того, что при падении игрального кубика выпадет чётное число очков?

1254. Какова вероятность того, что при падении монеты выпадет цифра или герб?

1255. Берут наугад пластинку домино. Какова вероятность того, что она: а) дубль; б) не дубль?

1256. В классе обучается 10 юношей и 20 девушек. Какова вероятность того, что к доске первым вызовут: а) юношу; б) девушку; в) вас; г) девушку или юношу?

1257. Найдите вероятность того, что ваш товарищ родился:
а) в воскресенье; б) осенью; в) в сентябре; г) 1 января.

Уровень А

1258. Какова вероятность того, что при падении игрального кубика выпадет:
а) два очка; б) чётное число очков; в) число очков, кратное 3?

1259. Из перевёрнутых 28 костяшек домино наугад берут одну. Какова вероятность того, что на ней окажется всего: а) 2 очка (событие A); б) 5 очков (событие B); в) 12 очков (событие C)?

1260. Из перевёрнутых 28 костяшек домино наугад берут одну. Какова вероятность того, что на одной из её частей окажется 6 очков (событие A)?

1261. Найдите вероятность того, что наугад выбранное натуральное однозначное число: а) является числом 5; б) делится на 3.

1262. Окрашенный со всех сторон деревянный кубик распилили на 8 равных кубиков и ссыпали их в коробку (*рис. 161*). Какова вероятность

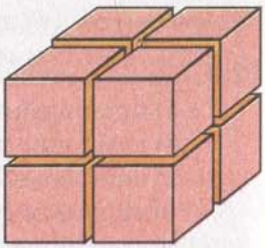


Рис. 161

того, что в кубике, вынутом наугад из коробки, будет окрашено: а) только одну грань; б) ровно две грани; в) не менее трёх граней?

1263. Окрашенный со всех сторон деревянный кубик распилили на 64 равных кубика и поместили их в коробку. Какова вероятность того, что в кубике, вынутом наугад из коробки, будет окрашено: а) только одну грань; б) ровно две грани; в) не менее трёх граней?

1264. Окрашенный со всех сторон деревянный кубик распилили на 125 равных кубиков и поместили их в мешок. Какова вероятность того, что вынимая из мешка кубик наугад, вы возьмёте такой, у которого окрашено: а) только одну грань; б) только две грани; в) три грани?

1265. Из букв, написанных на отдельных карточках, составили слово *МАТЕМАТИКА*, потом эти карточки перевернули, перетасовали и взяли наугад одну из них. Какова вероятность того, что на ней окажется: а) буква *А*; б) буква *М*?

1266. В кульке есть 20 свёрнутых бумажек. На двух из них написано «нет», а на остальных — «да». Какова вероятность того, что на взятой наугад бумажке окажется слово «да»?

Уровень Б

1267. В группе, кроме *А, В, С*, есть ещё 12 учеников. Какова вероятность того, что выбранная группой делегация из трёх человек будет состоять из учеников *А, В* и *С*?

1268. В группе, кроме вас, есть ещё 12 учеников. Какова вероятность того, что в избранную группой делегацию из трёх человек войдёте и вы?

1269. На каждой из трёх карточек написано одно из чисел: 1, 2, 3. Какова вероятность того, что перевернув и перемешав их, вы первой возьмёте карточку с числом 1, а второй — с числом 2?

1270. Столовая на обед приготовила 3 первых блюда: борщ, суп, щи; 4 вторых: вареники, голубцы, котлеты, рагу; и 2 десертных: мороженое и пирожное. Какова вероятность того, что кто-нибудь, не зная вкусов товарища, закажет для него борщ, котлеты и мороженое?

1271. Замок с «секретом» содержит 4 шестиугольные призмы, которые могут поворачиваться независимо друг от друга вокруг общей оси (*рис. 162*). На каждой боковой грани призмы написано одну из цифр от 1 до 6. Вращая призмы, в

проёме замка можно установить любое четырёхзначное число, записанное такими цифрами. Замок открывается только тогда, когда будет набрано число, составляющее «секрет» замка. Какова вероятность того, что человек, который не знает этого «секрета», откроет замок за один набор числа наугад?

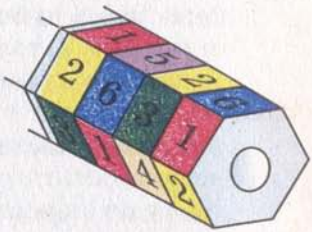


Рис. 162

1272. На полку наугад ставят четырёхтомный словарь. Какова вероятность того, что книги поставлены в надлежащей последовательности?

1273. Девочка хотела нанизать на нитку 7 различных бусин. Это сделал её братик. Какова вероятность того, что он сделал именно так, как хотела девочка?

1274. На столе лежит 5 перевёрнутых и перетасованных карточек. На каждой из них написана одна из букв *А*, *Е*, *А*, *Р*, *Т*. Какова вероятность того, что:

а) первой будет взята карточка с буквой *О*, второй — с буквой *Р*, третьей — с буквой *Т*;

б) из трёх взятых наугад карточек можно составить слово *ОРТ*?

1275. Из 32 карточек с буквами украинского алфавита берут наугад 4 карточки. Какова вероятность того, что из них можно составить слово *РОМБ*?

1276. Из 10 металлических конструкций две — высокого качества. Найдите вероятность того, что среди взятых наугад пяти конструкций только одна — высокого качества.

1277. В классе 10 учеников изучают английский язык, 8 — немецкий, 6 — французский. Наугад составлена группа из 3-х учащихся. Найдите вероятность того, что: а) все 3 ученика группы изучают различные иностранные языки; б) все 3 ученика изучают английский язык; в) все 3 ученика изучают один из названных языков.

1278. Среди 100 деталей обнаружено 2 бракованные. Из них наугад выбирают 6 деталей. Найдите вероятность того, что среди выбранных 6 деталей ровно 2 детали окажутся бракованными.

1279. Студент пришёл на экзамен, зная ответы только на 45 вопросов из 60. В каждый билет включено 2 вопроса из 60. Студент взял билет наугад. Найдите вероятность того, что он знает ответ: а) на оба вопроса; б) только на один вопрос.

Уровень В

1280. В магазин поступают лампы из двух заводов: 30 % — из одного и 70 % — из другого. Из ламп первого завода стандартными являются 85 %, а второго — 75 %. Какова вероятность того, что купленная в этом магазине лампа окажется стандартной?

1281. Найдите вероятность того, что выбранный наугад член последовательности $a_n = 3n + 2$ делится на 5, если: а) $n \le 100$; б) $n \le 1000$.

1282. В шахматном турнире принимают участие 20 шахматистов, среди них 6 мастеров спорта. Путём жеребьёвки их разделили на две группы по 10 шахматистов в каждой. Какова вероятность того, что: а) все 6 мастеров спорта попадут в одну группу; б) 2 мастера спорта попадут в одну группу, а 4 — в другую?

1283. В урне m белых и n чёрных шаров. Найдите вероятность того, что два вынутые наугад шара окажутся: а) белыми; б) разных цветов.

1284. Из 10 лотерейных билетов выигрышными являются 2. Найдите вероятность того, что среди взятых наугад 5 билетов выигрышным окажется: а) только один; б) по крайней мере один.

1285. Участник спортлото должен назвать шесть чисел из предложенных 49. Он выигрывает, если угадает 3, 4, 5 или 6 чисел. Найдите вероятности предугадать эти количества чисел.

1286. Что вероятнее угадать: а) 3 числа из 49 или 4 числа из 36; б) 7 чисел из 15 или 8 чисел из 15?

1287. На n карточках написаны числа от 1 до n. Берут две из них по очереди. Какова вероятность того, что взятое второе число окажется большим за первое?

1288. На нескольких карточках написаны различные одночлены из трёх множителей. На каждой карточке — одно из чисел 2, 3, 4, одна из букв a, b, c и одна из букв x, y, z (*рис. 163*). Какова вероятность того, что на взятой наугад карточке окажется одночлен $3ay$?

1289. Из пяти отрезков длиной 2, 3, 7, 8 и 9 см наугад выбирают три. Какова вероятность того, что из них можно составить треугольник?

1290. N экскурсантов официант наугад рассаживает за круглым столом. Найдите вероятность того, что A и B будут сидеть рядом.

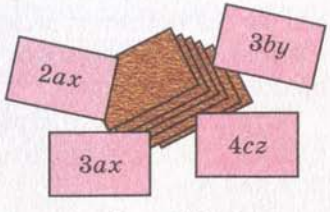


Рис. 163

1291. На полку поставили наугад 10 книг, три из них — исторические романы. Найдите вероятность того, что эти три романа будут стоять рядом.

1292. Абонент забыл три последние цифры номера, но помнит, что они разные. Какова вероятность того, что он наугад наберёт нужные цифры?

1293. Четыре билета в театр разыгрывают 4 юноши и 3 девушки. Какова вероятность того, что билеты достанутся: а) двум юношам и двум девушкам; б) юношам A, B и девушкам K, P?

1294. Берут наугад пластинку домино. Найдите вероятность того, что вторую пластинку, взятую также наугад, можно приложить к первой. Рассмотрите два случая.

Упражнения для повторения

1295. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и линиями $y = x^2$, $y = 6 - x$.

1126. Найдите производную функции:
а) $y = 2x^3 + 6x^2 - 5x$; б) $y = 2x^3(x^2 - 5)$; в) $y = (x^2 - 5) : (2x^3)$.

1297. Стрелец в неизменных условиях делает 5 серий выстрелов по мишени. В каждой серии 100 выстрелов. Результаты стрельбы занесены в таблицу. Найдите относительную частоту попадания в мишень в каждой серии. Постройте соответствующие столбчатые диаграммы.

Номер серии	1	2	3	4	5
Количество попаданий в мишень	69	64	72	78	65

§ 36. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА СОБЫТИЯ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

До сих пор речь шла о классическом понимании вероятности. Её вычисляют, исходя из того, что все рассматриваемые элементарные события одинаково вероятны. Такое случается сравнительно редко.

Представьте, что игральный кубик сделан так, что его грань с шестью очками находится дальше от центра масс, чем противоположная грань. Такой кубик и падает чаще вверх гранью с 6 очками. При этом наблюдается интересная и очень важная законо-

мерность. Когда кто-то один подбросил такой кубик 1000 раз и он упал, например, 300 раз вверх гранью с 6-ю очками, то и другие экспериментаторы имели бы примерно такие же результаты. Много массовых случайных событий имеют свойство устойчивости. При достаточно большом числе независимых испытаний частота появления наблюдаемого события колеблется около одного и того же числа. В справедливости этого многие специалисты убедились экспериментально. А математики Я. Бернулли, П. Чебышев и др. обосновали это утверждение и теоретически (закон больших чисел). Поэтому для таких (статистически устойчивых) событий есть смысл ввести понятие вероятности.

Если в n испытаниях событие A происходит m раз, то дробь $\frac{m}{n}$ — *определяет относительную частоту события A*. Во многих реальных случаях с увеличением n относительная частота событий стабилизируется и всё меньше отличается от некоторого числа p (когда $n \to \infty$, то $\frac{m}{n} \to p$). Это число p называют *вероятностью события A*.

Таково статистическое определение вероятности. Объём определённого им понятия гораздо шире того, что соответствует классическому определению (см. с. 314). Классическая вероятность — отдельный вид статистической. И всё же отличаются они существенно. Классическую вероятность вычисляют математическими методами, а статистическую в основном определяют экспериментально.

Теперь, говоря о вероятности, специалисты в основном подразумевают статистическую вероятность. Поэтому современная теория вероятностей тесно связана с математической статистикой. Объединение математической статистики и теории вероятностей называют *стохастикой*. Стохастический — значит случайный, вероятный.

Что такое экзит-пол? На каких основаниях ему доверяют?

Экзит-пол — это опрос социологическими службами избирателей на выходе их из избирательных участков с целью предсказать результаты выборов до получения их от избирательных комиссий. Ему доверяют на основе устойчивости относительной частоты события. Если за какую-то партию или кандидата из правильно выбранных 100 избирателей проголосовали, например, 20 % избирателей участка, то можно надеяться (с погрешностью около 5 %), что так проголосовали и все избиратели участка.

Одно из важнейших понятий стохастики — *случайная величина*. Величину называют случайной, если она может принимать заранее неизвестные числовые значения, зависящие от случайных обстоятельств. Примеры:

1) выигрыш на лотерейный билет;

2) расстояние от точки попадания пули к центру мишени.

Значение первой из этих случайных величин — некоторые целые числа. Такие величины называют *дискретными*. Множество значений второй величины — некоторый непрерывный отрезок числовой прямой. Такие величины называют *непрерывными*.

Рассмотрим з а д а ч у. Выпущено 100 лотерейных билетов. Из них 5 должны выиграть по 10 грн, 10 — по 5 грн, 40 — по 1 грн, остальные — безвыигрышные. Какой средний выигрыш приходится на один билет?

Решить эту задачу можно арифметическим способом:

$(5 \cdot 10 \text{ грн} + 10 \cdot 5 \text{ грн} + 40 \cdot 1 \text{ грн}) : 100 = 1{,}4 \text{ грн}$.

Мы проиллюстрируем на этой задаче понятие случайной величины. Здесь выигрыш — случайная величина, которая может принимать значения 0, 1, 5, 10 (грн) соответственно с вероятностями 0,45; 0,4; 0,1 и 0,05. Это — дискретная случайная величина ξ. Описанной ситуации соответствует такая таблица:

ξ	0	1	5	10
p	0,45	0,4	0,1	0,05

О б р а т и т е в н и м а н и е! Сумма вероятностей, имеющихся во второй строке таблицы, равна 1. Говорят, что данную случайную величину ξ *распределено по вероятностям*.

Если случайная величина ξ принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то говорят, что величину ξ распределено по такому закону:

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Её среднее значение называют *математическим ожиданием* и обозначают $M(\xi)$.

$$M(\xi) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Например, для предыдущей задачи

$$M(\xi) = 0 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}05 = 1{,}4.$$

Меру рассеиваний случайной величины вокруг её математического ожидания называют её *дисперсией*. Дисперсию случайной величины x обозначают символом $D(x)$ и вычисляют по формуле $D(x) = M(x - Mx)^2$. Здесь Mx — математическое ожидание величины x, $(x - Mx)^2$ — квадраты отклонений значений x от Mx. Величина $(x - Mx)^2$ также случайная, её математическое ожидание $M(x - Mx)^2$ — дисперсия случайной величины x.

Например, чтобы найти дисперсию рассмотренной выше случайной величины ξ, сначала найдём отклонения всех её значений от математического ожидания:

$0 - 1{,}4 = -1{,}4$; $1 - 1{,}4 = -0{,}4$; $5 - 1{,}4 = 3{,}6$; $10 - 1{,}4 = 8{,}6$.

Квадраты этих отклонений: 1,96, 0,16, 12,96, 73,96. Найдём математическое ожидание случайной величины:

$(x - Mx)^2$	1,96	0,16	12,96	73,96
p	0,45	0,4	0,1	0,05

$$1{,}96 \cdot 0{,}45 + 0{,}16 \cdot 0{,}4 + 12{,}96 \cdot 0{,}1 + 73{,}96 \cdot 0{,}05 = 5{,}94.$$

Это и есть дисперсия рассматриваемой случайной величины: $D(\xi) = 5{,}94$.

Если случайная величина дискретная и вероятности всех её значений равны, то говорят, что она имеет *равномерное дискретное распределение* вероятностей. По равномерному распределению выпадает число очков при подбрасывании правильного игрального кубика. А бывают другие распределения.

Для многих природных и общественных явлений характерны *биномиальные распределения вероятностей*. Биномиальное распределение возникает при последовательном проведении в одинаковых независимых условиях случайных опытов.

Английский математик А. Муавр ещё в XVIII в. измерил рост 1375 наугад выбранных женщин. На рисунке 164 изображена диаграмма, которая соответствует результатам его измерений. Если «успехом» назвать тот факт, что следующая встреченная женщина имеет рост, который находится в определённых пределах, то число женщин такой категории среди 1375 встреченных является случайной величиной с биномиальным распределением. Относительно параметра p можно утверждать, что этим числом может служить относительная частота женщин выделенной категории роста, поскольку число проведённых опытов достаточно большое и эта частота стабилизировалась. Английский

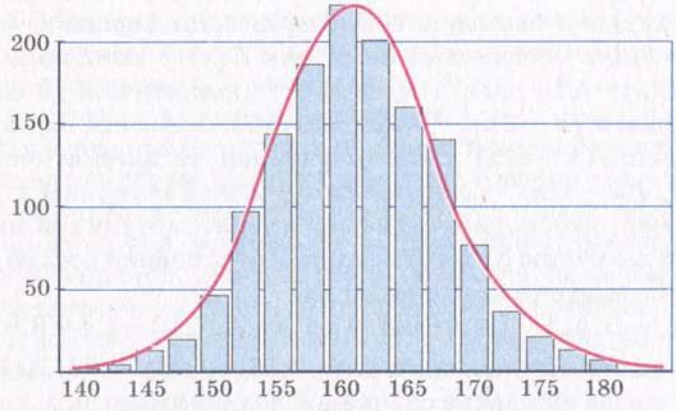


Рис. 164

психолог Ф. Гальтон сконструировал прибор (доску Гальтона), который наглядно показывает, как формируется случайная величина, распределённая по биномиальному закону, правда при $p = \frac{1}{2}$ (*рис. 165*). В верхний резервуар насыпаются шарики. Скатываясь по наклонной доске и обходя равномерно забитые в неё колышки, шарики заполняют нижние ячейки согласно биномиальному распределению вероятностей.

Если шариков достаточно много, то внизу они образуют симметричную горку колоколообразной формы. Верхний предел этой горки образует полигон, который при росте числа шариков приближается к кривой Гаусса — так называемой *кривой плотности стандартного нормального закона*.

В рассмотренном выше примере результаты измерения роста

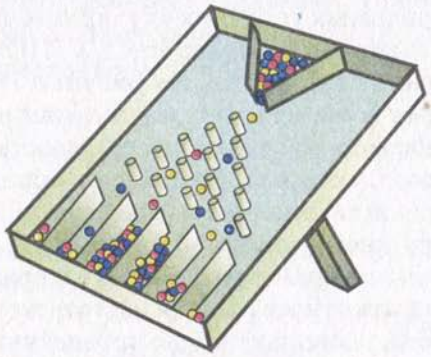


Рис. 165

женщин разбиты на 18 групп с разностью $d = 2{,}5$ см. Если бы разбили их на большее количество групп, чтобы эта разность равнялась, например, 0,5 см, и построили соответствующий полигон, то образовалась бы ломаная из многих отрезков. А если бы разность d продолжали уменьшать, то соответствующий полигон приближался бы к непрерывной кривой, изображённой на рисунке 164. Это — кривая плотности *нормального распределения вероятностей*. Примерно так распределяются вероятности масс новорождённых, скоростей газовых молекул и многих других случайных величин физической, биологической или социальной природы. Биномиальное распределение характерно для многих дискретных случайных величин, а нормальное — для непрерывных. Если известно, что распределение вероятностей случайной величины нормальное, то достаточно знать только две её числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсию), чтобы полностью описать распределение вероятностей.

Понимание сути нормального распределения необходимо всем учёным, исследующим закономерности живой или неживой природы и особенно — человеческого общества. Не случайно это распределение называют *нормальным*, оно — естественное. Именно так чаще всего распределяются не только массы, возрасты, физические возможности людей и человеческих сообществ, но и многие другие их характеристики. Не понимая этого, нельзя быть настоящим учёным.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое относительная частота событий?
2. Сформулируйте статистическое определение вероятности.
3. Что такое стохастика?
4. Что означает распределить случайную величину по вероятностям?
5. Что такое математическое ожидание? Что такое дисперсия?
6. Что такое нормальное распределение?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите математическое ожидание случайной величины x, если закон её распределения представлен в таблице.

x	1	5	10	15
p	0,2	0,3	0,4	0,1

Решение. $M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}4 + 15 \cdot 0{,}1 = 7{,}2$.
Ответ. 7,2.

Выполните устно

1298. Какая из таблиц задаёт закон распределения случайной величины?

x	1	2	3	4
p	0,2	0,3	0,4	0,1

x	1	2	3	4
p	0,5	0,2	0,3	0,1

Уровень А

1299. Известно, что среди 1000 новорождённых обычно бывает 511 мальчиков и 489 девочек. Найдите вероятность рождения мальчика.

1300. Ученик вырезал из дерева игральный кубик, такой, что, подбросив его 100 раз, получил результаты:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	0,2	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1

Какие можно ожидать результаты, если этот самый игральный кубик кто-нибудь другой подкинет 1000 раз?

1301. Представьте игральную косточку в форме правильной шестиугольной призмы, все рёбра которой равны и на основаниях которой написаны цифры 1 и 2, а на остальных гранях — 3, 4, 5, 6, 7 и 8 (*рис. 166*). Как, на ваш взгляд, могли бы распределиться вероятности выпадения тех или иных очков при многократном подбрасывании такой игорной косточки?

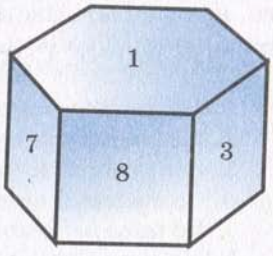


Рис. 166

Уровень Б

1302. Распределите по вероятностям случайную величину количества очков, выпадающих при бросании правильного игрального кубика. Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

1303. Только одна грань правильного однородного кубика окрашена жёлтым цветом. С какой относительной частотой будет падать этот кубик вверх жёлтой гранью, если его бросать много раз?

1304. На гранях правильного октаэдра нанесены очки от 1 до 8 (*рис. 167*). Задайте таблицей случайную величину количества очков, выпадающих при бросании такого октаэдра. Найдите среднее значение этой величины.

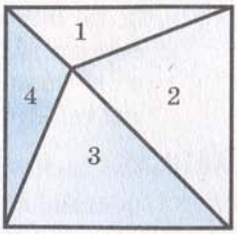


Рис. 167

1305. Случайная величина количества очков, выпадающих при бросании неправильного игрального кубика, распределена по такому закону:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

Заполните последнюю ячейку таблицы. Определите математическое ожидание величины ξ.

1306. Выпущено 1000 лотерейных билетов, на один из которых должен выпасть выигрыш 100 грн, на 10 — по 20 грн, на 50 — по 1 грн. Задайте таблицей случайную величину выигрыша. Найдите математическое ожидание этой величины.

Уровень В

1307. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределённой по такому закону:

а)

φ	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

б)

ψ	1	2	3	4	5	6	7	8
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Придумайте реальные ситуации, математическими моделями которых были бы случайные величины φ и ψ.

1308. Бросают сразу два игральных кубика и считают сумму очков на их верхних гранях. Задайте случайную величину этой суммы и найдите её математическое ожидание.

1309. Из полного набора пластинок домино, перевёрнутых вниз очками, берут наугад одну и считают сумму очков на обеих её половинках. Задайте случайную величину этой суммы таблично и начертите соответствующую диаграмму.

1310. Постройте график функции $y = C_9^x$. Перечислите её важнейшие свойства. Проведите через точки графика плавную линию, подобную кривой Гаусса.

1311. Постройте график функции $y = C_6^x$. Укажите её область определения и область значений.

1312. На рисунке 168 показано распределение случайной величины μ. Запишите закон её распределения в виде таблицы. Найдите её математическое ожидание и дисперсию.

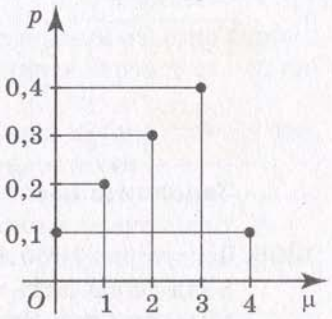


Рис. 168

1313. Представьте, что игральный «кубик» сделано из однородного материала в форме правильной четырёхугольной призмы, сторона основания которой 2 см, а высота 1,9 см. Пусть на его основаниях нанесены цифры 1 и 6, а на других гранях — 2, 3, 4 и 5. Каким, на ваш взгляд, может быть распределение вероятностей при многократном подбрасывании такого «кубика»? Попробуйте проверить свою догадку экспериментально.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ КОНТРОЛЮ

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Даны три множества: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{3, 6, 9\}$, $C = \{6, 12, 18, 24\}$. Какие из утверждений правильные для этих множеств: а) $A \subset C$; б) $C \subset A$; в) $B \subset C$; г) $B \subset A$?

2. Даны множества: $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, $C = \{3,5,7,8\}$. Найдите множество $(A \cap B) \cap C$.

а) {3}; б) {4}; в) {5}; г) {6}.

3. Значение выражения $5! - 4!$ равно:

а) 1; б) 96; в) 69; г) 30.

4. Сколько чётных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 6, 8 (повторение цифр допускается):

а) 9; б) 16; в) 12; г) 10?

5. 25 фотомоделей обменялись фотографиями так, что каждая обменялась с каждой. Сколько было роздано фотографий:
а) 200; б) 300; в) 400; г) 600?

6. Сколько диагоналей имеет правильный 12-угольник:
а) 200; б) 300; в) 400; г) 600?

7. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены все возможные пятизначные числа без повторения цифр. Сколько из этих чисел не начинаются с цифры 1:
а) 6; б) 24; в) 96; г) 118?

8. Укажите выборку, для которой мода и медиана равны между собой:
а) 2, 7, 7, 12, 4, 12, 3, 5, 6, 9, 7, 9, 6, 4;
б) 2, 12, 10, 6, 12, 14, 10, 12, 14, 6, 16;
в) 4, 3, 6, 6, 13, 12, 5, 8, 9, 13, 4, 14, 12;
г) 3, 7, 7, 7, 8, 8, 12, 13, 14, 10, 2, 3, 5.

9. Какая вероятность того, что наугад выбранное двузначное число, которое делится на 4, делится и на 12:

а) $\frac{5}{7}$; б) $\frac{4}{11}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{4}$?

10. Какая вероятность того, что наугад выбранное число от 1 до 30 является делителем числа 30:

а) $\frac{1}{30}$; б) $\frac{1}{15}$; в) $\frac{4}{15}$; г) $\frac{4}{30}$?

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Двузначное число составляют из цифр 0, 1, 3, 4, 5, 6, 9 (повторение цифр допускается). Сколько всего можно составить:
а) чисел; б) нечётных чисел?

2. Столовая приготовила на ужин 3 вторых блюда (A, B, C) и два салата (M, K). Сколько разных наборов из второго блюда и салата можно выбрать на ужин? Составьте соответствующую диаграмму-дерево.

3. Пусть год имеет 365 дней. Какая вероятность того, что на случайно вырванном листе календаря число: а) кратное 5; б) равно 29?

4. Варианты выборки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 имеют частоты 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 2 соответственно. Найдите размах, моду и медиану выборки, если она имеет всего 28 вариант.

5. Из цифр 0, 1, 2, 3 случайным образом составляют двузначное число (повторение цифр допускается). Какая вероятность получить: а) чётное число; б) нечётное число; в) число кратное 5?

6. На четырёх карточках написаны числа 1, 2, 3, 4. Какая вероятность того, что сумма чисел на трёх произвольно выбранных карточках делится на: а) 3; б) 2; в) 6?

7. Сколько можно получить различных четырёхзначных чисел, подставляя пропущенные цифры в числа: а) 3*6*; б) 57**; в) *2*4?

8. В футбольной команде 11 человек: вратарь, 4 защитника, 4 полузащитника, 2 нападающих. Команда выбирает капитана и его заместителя. Найдите число всех возможных: а) вариантов выбора; б) вариантов, если трое футболистов не участвуют в выборе; в) вариантов, если капитан — точно не защитник, а его заместитель — не вратарь.

9. Какова вероятность того, что при четырёх подбрасываниях монеты: а) ни разу не выпадет «герб»; б) «цифра» выпадет ровно 1 раз; в) «герб» выпадет хотя бы один раз?

10. В квадратном уравнении $x^2 + bx + 12 = 0$ коэффициент b может принимать целые значения от 1 до 10. Найдите вероятность того, что полученное уравнение будет иметь два различных корня.

Исторические сведения

Простейшие комбинаторные задачи учёные Древней Греции решали ещё в IV в. до н. э. Отдельные индийские математики умели находить число комбинаций из n элементов по k еще во II в. до н. э., знали также соотношение, которое теперь записывают в виде равенства $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Начиная с XVII века, европейские математики интересовались комбинаторикой в связи с развитием теории вероятностей. Термин «комбинаторика» получил распространение после опубликования работы Г. Лейбница «Рассуждение о комбинаторном искусстве» (1666 г.). Термины и символы комбинаторики устанавливались не сразу. Произведение n первых натуральных чисел сначала называли *факультативом* и обозначали знаком $1^n/_1$. Только в конце XVIII в. его стали называть факториалом и обозначать символом $n!$. Знаки P_n и C_m^n появились только в XIX в. Эйлер число комбинаций из m элементов по n обозначал знаком $\binom{m}{n}$. Отдельные математики и теперь пользуются таким обозначением.

Формулу для разложения бинома $(a + b)^n$ некоторые учёные-арабы знали ещё в X в. Опубликовал её Насирэддин Туси в XIII в. Арабские учёные знали также, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. Из

этого равенства вытекает правильность треугольника Паскаля для всех натуральных значений n. Следовательно, формула, которую теперь называют бином Ньютона, была известна задолго до рождения великого учёного. Ньютон только распространил её на случаи отрицательных и дробных показателей степени n.

В отдельную математическую дисциплину комбинаторика оформилась после XVIII века. С её помощью учёные расшифровали много различных кодов, прочитали крито-микенские иероглифы, разгадали структуру дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК) и т.д. В данном учебнике рассмотрены только простейшие комбинаторные задачи и способы их решения; в полных курсах есть много других формул и решаются намного тяжелее и интереснее задачи.

Собирать и анализировать статистические данные некоторые люди начали давно. В Китае переписи населения предпринимались ещё более 4 тыс. лет назад. В Киевской Руси переписи проводились с 1245 г.

В Европе в XVII в. появилась отдельная наука «Политическая арифметика». Её инициировала книга Дж. Граунта «Естественные и политические наблюдения, сделанные по бюллетеню смертности ... относительно управления, религии, торговли, роста, воздуха, болезней и различных изменений ...» (1662). В ней впервые введено понятие частоты события, выявлено, что мальчики рождаются чаще, чем девочки (в отношении 14:13). Автор книги исследовал, что в тогдашнем Лондоне из каждых 100 новорождённых жили до:

6 лет — 64, 36 лет — 16, 66 лет — 3,
16 лет — 40, 46 лет — 10, 76 лет — 1,
26 лет — 25, 56 лет — 6, 1986 — 0.

Теорию вероятностей как отрасль математики основали французские математики Б. Паскаль и П. Ферма.

ПАСКАЛЬ Блез (1623—1662)

Выдающийся французский математик, физик, философ. В 16 лет сформулировал основную теорему проективной геометрии. Один из создателей теории вероятностей, разработал новые методы в комбинаторике и математическом анализе.

«Паскаль — человек большого ума и большого сердца, один из тех, которых называют пророками».

Л. Толстой

Впоследствии большой вклад в развитие математической статистики сделали У. Петти, А. Муавр, Л. Эйлер, Я. Бернулли, П. Лаплас, С. Пуассон и др. В Российской империи в XIX в. проблемами статистики больше занимались украинские математики М. Остроградский и В. Буняковский. В частности, М. Остроградский разработал статистические методы браковки товаров, составил «Таблицы для облегчения вычисления траектории тела в среде с сопротивлением». В. Буняковский исследовал статистические характеристики народонаселения, вероятных контингентов русской армии, пенсий, правдоподобия показаний в судопроизводстве, погрешностей в наблюдениях и т. п. Он был главным экспертом правительства по вопросам статистики и страхования.

В XX в. из украинских математиков в области теории вероятностей и математической статистики плодотворно работали Е. Слуцкий, М. Кравчук, С. Бернштейн, И. Гихман, Ю. Линник и другие учёные. Современное государство не может функционировать без статистики. В Украине существует Государственный комитет статистики, тысячи специалистов собирают, анализируют и используют различные статистические сведения.

ГЛАВНОЕ В РАЗДЕЛЕ 4

Задачи, в которых надо определить, сколько различных подмножеств или упорядоченных подмножеств можно образовать из элементов данного множества, называют *комбинаторными*.

Если элемент некоторого множества A можно выбрать m способами, а элемент множества B n способами, то элемент из множества A или из множества B можно выбрать $m + n$ способами. Это — *правило суммы*.

Если первый компонент пары можно выбрать m способами, а второй — n способами, то такую пару можно выбрать $m \cdot n$ способами. Это — *правило произведения*.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n называют *n-факториалом* и *обозначают* $n!$

Упорядоченные k-элементные подмножества n-элементного множества называют *размещениями из n элементов по k*. Их число обозначают A_n^k.

Для любых натуральных n и k $(n > k)$ верны равенства:

$$A_n^k = n(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1), \text{ или } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Число размещений из n элементов по k равно произведению k последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых n.

Размещения из n элементов по n называют *перестановками из n элементов*. Их число обозначают P_n.

Число перестановок из n элементов равно $n!$, т. е. $\mathbf{P_n = n!}$

Комбинацией из n элементов по k называют любое k-элементное подмножество n-элементного множества. Число комбинаций из n элементов по k обозначают C_n^k и вычисляют по формуле $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Статистика — это наука, которая занимается сбором, обработкой и изучением различных данных, связанных с массовыми явлениями, процессами и событиями.

Мода выборки — её варианта с наибольшей частотой. *Медиана выборки* — число, которое «разделяет» соответствующий вариационный ряд пополам. *Средним значением выборки* называют среднее арифметическое всех её вариант.

Элементарным событием называют каждый возможный результат вероятностного эксперимента. Множество всех возможных последствий эксперимента называют *пространством элементарных событий* и обозначают греческой буквой Ω (омега).

Вероятностью случайного события A называют отношение числа $n(A)$ благоприятных для события A элементарных событий к числу n всех равновозможных и попарно несовместимых элементарных событий, которые образуют пространство элементарных событий для данного испытания: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n}$.

Такое определение вероятности называют *классическим*.

Важнейшие свойства вероятности случайного события.

1. Если C — событие невозможное, то $P(C) = 0$.
2. Если B — событие достоверное, то $P(B) = 1$.
3. Если X — событие случайное, то $0 \le P(X) \le 1$.
4. Если $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ — элементарные события, исчерпывающие некоторое испытание, то $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n) = 1$.

Если в n испытаниях событие A происходит m раз, то дробь $\dfrac{m}{n}$ определяет *относительную частоту события A*. Во многих реальных случаях с увеличением n относительная частота события стабилизируется и всё меньше отличается от некоторого числа p (когда $n \to \infty$, то $\dfrac{m}{n} \to p$). Это число p называют *вероятностью события A*. Таково *статистическое* определение вероятности.

Раздел 5

УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ. ОБОБЩЕНИЕ И СИСТЕМАТИЗАЦИЯ

Основные темы раздела

- Уравнения и методы их решения
- Неравенства и методы их решения
- Системы уравнений и методы их решения
- Задачи с параметрами

Мне приходится распределять своё время между политикой и уравнениями. Однако уравнения, по моему мнению, гораздо важнее, потому что политика существует только для данного момента, а уравнения будут существовать вечно.

А. Ейнштейн

В этом разделе вы расширите сведения о различных видах уравнений, неравенств и их систем, рассмотрите, повторите и обобщите методы их решения. Решение задач с параметрами способствует развитию логического мышления и формированию навыков исследовательской деятельности. Упорная работа над материалом этого раздела поможет вам систематизировать весь пройденный материал и хорошо подготовиться к ВНО.

§ 37. УРАВНЕНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

В предыдущих классах вы ознакомились с различными видами уравнений и способами их решения. В этом году рассматривали логарифмические и показательные уравнения. Повторим и обобщим сведения об уравнениях и дополним их некоторыми новыми.

Равенство с переменными называется уравнением, если требуется выяснить, при каких значениях переменных данное равенство правильное.

Уравнение с одной переменной в общем виде записывают так:

$$f(x) = g(x) \text{ или } \varphi(x) = 0.$$

Здесь $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторые функции от x.

Корни уравнения $f(x) = g(x)$ входят в область определения каждой из функций $f(x)$ и $g(x)$. Общую часть областей определения этих функций называют *областью допустимых значений* (*ОДЗ*) *уравнения* $f(x) = g(x)$.

Например: а) $x^2 + 2x = 0$, ОДЗ: R;

б) $\frac{1}{x} = \frac{1}{x+2}$, ОДЗ: $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; \infty)$.

Два уравнения называют *равносильными*, если множества их решений равные.

Например, уравнения $2x - 6 = 10$ и $7x + 6 = 62$ равносильны, так как они имеют одинаковый корень $x = 8$. Записывают это так:

$$(2x - 6 = 10) \Leftrightarrow (7x + 6 = 62).$$

Равносильными являются также уравнения $x + 12 = x + 6$ и $8x + 7 = 8x$, потому что они оба не имеют решений, а следовательно, множества их решений равные.

Важно знать, при каких преобразованиях данное уравнение переходит в равносильное ему уравнение.

Теорема 1. **Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же выражение, определённое на всей области допустимых значений X данного уравнения, то получим уравнение, равносильное данному на множестве X.**

Теорема 2. **Если обе части уравнения умножить на одно и то же отличное от нуля число или выражение, существующее и отличное от нуля для всех x из области допустимых значений X данного уравнения, то получим уравнение, равносильное данному на множестве X.**

Уравнение A называют *следствием* уравнения B, если каждое решение уравнения B удовлетворяет и уравнение A. Записывают: $B \Rightarrow A$.

Например, $(2x-1=15) \Rightarrow ((2x-1)(x-2)=15(x-2))$. Второе уравнение является следствием первого, поскольку множество его корней $\{2, 8\}$ содержит множество корней первого $\{8\}$.

Два уравнения A и B равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Чтобы решить уравнение, достаточно решить его следствие и из полученного множества решений отбросить те из них, которые данное уравнение не удовлетворяют (*посторонние корни*). Это можно делать проверкой.

Чаще всего используются такие методы решения уравнений: разложение на множители, замена переменной, применение свойств функций.

Разложение на множители. Множеством решений уравнения $f(x) \cdot g(x) = 0$, определённого на некотором множестве X, является объединение множеств решений каждого из уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$, взятых на этом множестве X.

Учитывая условие равенства произведения нулю, имеем:

$$f(x)\cdot\varphi(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ \varphi(x)=0. \end{array}\right.$$

Пример 1. Решите уравнение $(3x^2+2x-3)^2=9x^4-42x^2+49$.

Решение. Преобразуем уравнение, используя формулы сокращённого умножения:

$$(3x^2+2x-3)^2=(3x^2-7)^2, \qquad (3x^2+2x-3)^2-(3x^2-7)^2=0,$$
$$(3x^2+2x-3-3x^2+7)(3x^2+2x-3+3x^2-7)=0.$$

Упростим образованное уравнение:

$$(2x+4)(6x^2+2x-10)=0, \quad (x+2)(3x^2+x-5)=0.$$

$$(x+2)(3x^2+x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ 3x^2+x-5=0. \end{array}\right.$$

Решим каждое из уравнений: 1) $x+2=0$, $x_1=-2$;

2) $3x^2+x-5=0$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{61}}{6}$, $x_3=\frac{-1+\sqrt{61}}{6}$.

Ответ. $-2, \frac{-1-\sqrt{61}}{6}, \frac{-1+\sqrt{61}}{6}$.

Пример 2. Решите уравнение $2\sin^3 x + 2\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители: $2\sin^2 x(\sin x + \cos x) - \cos^2 x(\sin x + \cos x) = 0$, или $(\sin x + \cos x)(2\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$. Учитывая условие равенства произведения нулю, получим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0,\\ 2\sin^2 x-\cos^2 x=0,\end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=-1,\\ \operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Тогда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$, или $x=\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

Ответ. $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; $\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

Замена переменной. Этот метод заключается в том, что для решения уравнения $f(x)=0$ вводят новую переменную $y=g(x)$ и выражают $f(x)$ через y. Образуется новое уравнение $\varphi(y)=0$.

Найдя его корни $y_1, y_2, y_3, \ldots$, решают совокупность уравнений $g(x)=y_1$, $g(x)=y_2$, $g(x)=y_3$, ..., из которых и получают корни данного уравнения.

Пример 3. Решите уравнение $(5x^2-4x+1)(5x^2-4x+2)=6$.

Решение. Сделаем замену $5x^2-4x+1=y$, (*)

тогда $y(y+1)=6$, или $y^2+y-6=0$, отсюда $y_1=-3$, $y_2=2$.

Чтобы найти корни заданного уравнения, подставим полученные значения для y в уравнение (*) и решим совокупность уравнений

$5x^2-4x+1=-3$ и $5x^2-4x+1=2$.

Первое уравнение действительных корней не имеет, а второе имеет два корня: $x_1=-0{,}2$ и $x_2=1$.

Ответ. $-0{,}2$; 1.

Иногда, выполняя замену, удобно вводить не одну переменную, а несколько.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt[4]{2-x}+\sqrt[4]{14+x}=16$.

Решение. Обозначим $\begin{cases}\sqrt[4]{2-x}=a,\\ \sqrt[4]{14+x}=b.\end{cases}$

Тогда заданное уравнение можно записать в виде $a+b=16$. Чтобы получить ещё одно уравнение, возведём a и b в четвёртую степень и сложим. Получим уравнение $a^4+b^4=16$.

Итак, чтобы найти a и b, нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases}a+b=2,\\ a^4+b^4=16.\end{cases}$$

Решим её:

$$\begin{cases}a=2-b,\\ (2-b)^4+b^4=16;\end{cases}\quad\begin{cases}a=2-b,\\ 16-32b+24b^2-8b^3+b^4+b^4=16;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=2-b,\\ b(b^3-4b^2+12b-16)=0;\end{cases}\quad\begin{cases}a=2-b,\\ b(b-2)(b^2-2b+8)=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения находим, что $b=0$ или $b=2$. Тогда $a=2$, или $a=0$. Возвращаясь к замене, получим совокупность двух систем уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{2-x}=2,\\ \sqrt[4]{14+x}=0,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}\sqrt[4]{2-x}=0,\\ \sqrt[4]{14+x}=2.\end{cases}$$

Отсюда $x=-14$ или $x=2$.

Ответ. -14; 2.

Применение свойств функций к решению уравнений. Вы уже знаете, что уравнения можно решать графически. При этом получают приближённые значения корней, поэтому всегда такое решение следует дополнять проверкой.

Пример 5. Решите уравнение $2^x=3-x$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y=2^x$ и $y=3-x$ (*рис. 169*). Как видим, они пересекаются в одной точке с абсциссой $x\approx 1$. Проверка подстановкой показывает, что это точный корень уравнения $2^x=3-x$.

Ответ. 1.

Чтобы решить такое уравнение, необязательно строить графики функций, задающих уравнения. Можно использовать свойства непрерывности и монотонности функций. Достаточно обратить внимание на то, что обе функции на всём множестве $\boldsymbol{R}$ непрерывные и одна из них ($y = 2^x$) — возрастающая, а вторая ($y = 3 - x$) — убывающая. В этом случае уравнение может иметь только один корень, который находят подбором.

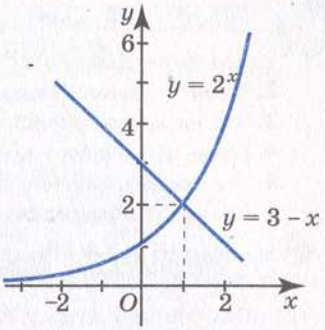


Рис. 169

Пример 6. Решите уравнение $x^2 - |x| - 12 = 0$.

Решение. Функция $y = x^2 - |x| - 12$ — чётная, её график симметричен относительно оси y, а корни уравнения — противоположные числа. Поэтому достаточно найти неотрицательные корни уравнения $x^2 - x - 12 = 0$ (которое не содержит модуля) и дополнить их противоположными числами.

Уравнение $x^2 - x - 12 = 0$ имеет два корня: -3 и 4, но только один из них — положительный: $x = 4$. Противоположным ему есть число -4, поэтому уравнение $x^2 - |x| - 12 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

Пример 7. Решите уравнение $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2\sin^2 \dfrac{\pi x}{2}$.

Решение. ОДЗ: $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Левая часть уравнения (при определённом значении x) — сумма двух положительных взаимно обратных чисел, которая всегда больше или равна числу 2. Значение правой части не превышает 2. Следовательно, равенство может быть правильным только при условии, что правая и левая части равны двум. Т.е. данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2, \\ 2\sin^2 \dfrac{\pi x}{2} = 2. \end{cases}$

Система имеет 2 решения: $x = -1$ и $x = 1$ (проверьте).

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что такое уравнение?
2. Какие вы знаете виды уравнений? Приведите примеры.
3. Что называют областью допустимых значений уравнения?
4. Какие уравнения называют равносильными?
5. Что такое уравнение-следствие?
6. Какие вы знаете способы решения уравнений?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Решите уравнение $\frac{3}{1+x+x^2}-1=\frac{2-x^2-x}{3}$.

Р е ш е н и е. ОДЗ: $\boldsymbol{R}$, так как $x^2+x+1\neq 0$.

После преобразования правой части уравнение принимает вид:

$$\frac{3}{1+x+x^2}-1=\frac{3-1-x-x^2}{3}, \text{ или } \frac{3}{1+x+x^2}-1=1-\frac{1+x+x^2}{3}.$$

Введём замену $y=\frac{x^2+x+1}{3}$. Получим уравнение:

$$\frac{1}{y}-1=1-y, \text{ или } \frac{1}{y}+y-2=0, \frac{y^2-2y+1}{y}=0, \text{ отсюда } y=1,$$

т. е. $\frac{x^2+x+1}{3}=1$. Решим полученное уравнение: $x^2+x+1=3$, или $x^2+x-2=0$, отсюда $x_1=-2$, $x_2=1$.

О т в е т: -2; 1.

2. Решите уравнение $2\sqrt[3]{(x-2)^2}+2\sqrt[3]{(x-3)^2}=5\sqrt[3]{(x-2)(x-3)}$.

Р е ш е н и е. Это однородное уравнение. Подстановкой убеждаемся, что $x=2$ не является корнем уравнения и делим почленно на $\sqrt[3]{(x-2)^2}$. Получим уравнение $2+2\sqrt[3]{\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2}-5\sqrt[3]{\frac{x-3}{x-2}}=0$, которое подстановкой $\sqrt[3]{\frac{x-3}{x-2}}=t$ сводим к уравнению $2t^2-5t+2=0$.

Его корни: $t=2$ и $t=\frac{1}{2}$, поэтому $\frac{x-3}{x-2}=8$, или $\frac{x-3}{x-2}=\frac{1}{8}$. Решения

$x = \frac{13}{7}$ и $x = \frac{22}{7}$ удовлетворяют данное уравнение.

Ответ. $\frac{13}{7}$; $\frac{22}{7}$.

3. Решите уравнение $\log_2(14 - 2x) = x - 3$.

Решение. Найдём ОДЗ: $14 - 2x > 0$, отсюда $x < 7$.

По свойству логарифмов $14 - 2x = 2^{x-3}$, или $7 - x = 2^{x-4}$. Поскольку левая часть уравнения — функция убывающая, а правая — возрастающая, то уравнение может иметь только один корень. Подбором находим, что $x = 5$ — корень уравнения.

Ответ. 5.

4. Решите уравнение $\frac{2}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)\right) = 1 - \log_2 x$.

Решение. Областью допустимых значений данного уравнения является система условий: $x > 0$ и $-1 \le \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \le 1$. Поскольку $x + \frac{1}{x} \ge 2$, как сумма взаимно обратных функций, то $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \ge 1$. Получили, что $1 \le \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \le 1$. Поэтому уравнение может иметь решение только при $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1$. Отсюда $x = 1$. Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ удовлетворяет данное уравнение.

Ответ. 1.

Выполните устно

1314. Найдите область допустимых значений уравнения:

а) $\frac{1}{x-2} = 3x$; б) $\frac{3x}{x^2-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$; в) $\frac{1}{x^3-x} = 2x + \frac{3}{x^2-1}$.

1315. Может ли уравнение вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — чётная функция, иметь нечётное количество корней?

1316. Чётное или нечётное количество корней имеет уравнение:

а) $x^3 = x$; б) $x^4 - 4 = 0$; в) $x^2(|x| - 2) = 0$; г) $x^2 + 2|x| = 3$?

Уровень А

Решите уравнение (1317—1320).

1317. а) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; б) $6x^4 - x^2 - 15 = 0$.

1318. а) $8x^6 - 9x^3 + 1 = 0$; б) $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$.

1319. а) $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{3}{x+1}$; б) $\frac{y+4}{y-4} + \frac{y}{y+4} = \frac{32}{y^2-16}$.

1320. а) $\frac{x-4}{x+2} = \frac{x-2}{x+1}$; б) $\frac{y+1}{2y-1} - \frac{8y-1}{4y^2-1} = \frac{y-1}{2y+1}$.

Решите уравнение методом разложения на множители (1321—1322).

1321. а) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$; б) $x^4 + x^3 - x^2 - x = 0$.

1322. а) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$; б) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.

Решите уравнение методом замены переменной (1323—1326).

1323. а) $(x-2)^4 + 3(x-2)^2 = 18$; б) $(3x^2 + x)^6 - 9(3x^2 + x)^3 = -8$.

1324. а) $(x+1)^6 - 2(x+1)^3 = 48$; б) $(x^2 + 2x)^8 + 4(x^2 + 2x)^4 = 5$.

1325. а) $\frac{x}{2x+1} + \frac{2x+1}{x} = 1$; б) $\frac{4x}{x-1} + \frac{x-1}{x} = 4$.

1326. а) $\frac{x-2}{x+3} + \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{2}$; б) $\frac{2(x^2-1)}{x^2+1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$.

1327. Решите уравнение: а) $x^3 = 2 - x$; б) $2x^5 = -x - 3$.

Уровень Б

Решите уравнение (1328—1335).

1328. а) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x = 3$; б) $x^5 - 2x^4 - x^3 - 8x^2 + 16x = -8$;
в) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$; г) $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8 = 0$.

1329. а) $(2x^2 + x)^2 = x^4 - 4x^2 + 4$; б) $(x^2 + 3x + 2)^2 = x^2 - 10x + 25$;
в) $x^4 - 6x^2 + 9 = (2x^2 + 3)^2$; г) $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8$.

1330. а) $\frac{2x+1}{x^2+2x-3} = \frac{x+1}{x^2+x-2}$;

б) $\frac{5-x}{x^2+6x+8} + \frac{3x+9}{x^2-x-6} = \frac{2x+1}{x^2+x-12}$.

1331. а) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = -16$;
б) $(x+1)(x-2)(x-3)(x-6) = 13$;

в) $(x-3)(x+4)(x+5)(x-2)=18$;

г) $(x-2)(x+3)(x-4)(x-9)=-124$.

1332. а) $\frac{18}{x^2+2x+1}-\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{1}{x^2+2x-3}$; б) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-\frac{5}{2}$;

в) $\frac{16}{(x-2)(x-4)}+\frac{7}{(x-1)(x-5)}=1$; г) $\frac{4}{x^2+4x}+x^2+4x=-5$.

1333. а) $\frac{x^2-2x+6}{x}+\frac{3x}{x^2-2x+6}=4$; б) $\frac{x^2+2x-2}{x^2+2x}+\frac{x^2+2x}{x^2+2x+2}=2$;

в) $x^4+x^2-\frac{8}{x^4+x^2}=-2$; г) $\frac{x^2-x+1}{x^2-x+2}+\frac{x^2-x+2}{x^2-x+3}=\frac{7}{6}$.

1334. а) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=4$; б) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+9\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$;

в) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x-\frac{1}{x}\right)=-2$; г) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=2$.

1335. а) $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$; б) $\frac{2x}{x^2+x-6}+\frac{5x}{x^2+3x-6}=-3$;

в) $\frac{2x}{3x^2-x+2}+\frac{5x}{3x^2+5x+2}=1$; г) $\frac{x}{x^2-x-4}-\frac{x}{x^2+x-4}=-\frac{1}{4}$.

1336. Решите однородное уравнение:

а) $3\cdot16^x+2\cdot81^x=5\cdot36^x$; б) $\sqrt[3]{(x+4)^2}+4\sqrt[3]{(x-4)^2}=5\sqrt[3]{16-x^2}$;

в) $10\sin^2x+5\sin x\cos x+\cos^2x=3$; г) $\sin^2x-3\cos^2x=\sin2x$.

1337. Решите уравнение:

а) $1+2|\sin x|=\cos2x$; б) $3^{|x+6|}-3^{\left|x^2+4x-12\right|}=\ln(\operatorname{tg}225^\circ)$;

в) $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+11+6\sqrt{x+2}}=6$;

г) $\left|2+\log_{\frac{1}{5}}x\right|+3=|1+\log_5x|$.

1338. Используя свойства функций, решите уравнение:

а) $3-x^3=2x$; б) $2x^7=3-x$; в) $x^2-6|x|+8=0$;

г) $x^2+2|x|-3=0$; д) $6^x-3^x=27$; е) $3^x+4^x=5^x$.

Уровень В

Решите уравнение (1339—1344).

1339. а) $x^2+\dfrac{81x^2}{(9+x)^2}=40$; б) $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2+\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2=\dfrac{40}{9}$.

1340. а) $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$; б) $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$.

1341. а) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{x^2+2x-3}=4-2x$;

б) $\sin 2x=\sin x+\cos x-1$.

1342. а) $25^{\log_4 x}-5^{\log_{16}x^2+1}=\log_{\sqrt{3}}9\sqrt{3}-25^{\log_{16}x}$;

б) $\dfrac{2}{15}\left(16^{\log_9 x+1}-16^{\log_3\sqrt{x}}\right)+16^{\log_3 x}-\log_{\sqrt{5}}5\sqrt{5}=0$.

1343. а) $(x-2)^2-6(x^2-4)+5(x+2)^2=0$; б) $9^x+6^x=2^{2x+1}$;

в) $10^x+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\cdot 50^{\frac{1}{x}}$; г) $\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^2+\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2-2\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

1344. а) $\sqrt{4x^2-11x+6}\log_{\cos\pi x}(|3x-7|+1)=0$;

б) $(4x^2+x-3)\log_{\sin\pi x}(\sqrt{2x-1}+1)=0$.

1345. Сколько решений имеет уравнение:

а) $\ln(x-x^2)=\cos x$; б) $2^{x+1}+2^{1-x}=\log_2(16-x^2)$?

Решите уравнение (1346—1347).

1346. а) $\cos(\pi(\cos^2 2x-2\cos^2 x+1))=1$;

б) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{13}\cos^2 2x\right)=\operatorname{tg}(2\pi\cos^2 x)$.

1347. а) $2^{x^2-4x+5}=1+\sin^2\dfrac{\pi x}{4}$; б) $2x^2+\log_2(7+2x-x^2)=x^4+3$.

1348. Найдите все пары $(x;\ y)$, удовлетворяющие уравнение:

а) $12\sin x+5\cos x=2y^2-4y+15$;

б) $\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{9}{x^2}\right)(3+\sin^2 xy)=1+5\cos^2 xy$.

Решите уравнение (1349—1350).

1349. а) $3\operatorname{arctg}^2 x+2\sqrt{3}\operatorname{arctg} x=3$; б) $4\arcsin^4 x-4\arcsin^2 x=-1$.

1350. а) $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}}-\sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2}=3;$

б) $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}}-\sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2}=5.$

Упражнения для повторения

1351. Постройте график функции $y=(x+3)^2+2$ и найдите промежутки знакопостоянства и монотонности. Имеет ли функция наименьшее значение? А наибольшее?

1352. Вычислите: а) $(2\sqrt{12}-\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$; б) $(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}})^2$.

1353. Решите неравенство $|\lg x-1|<1$.

1354. Решите неравенство $6(x-1)+4(x+2)>-9(x+1)+x$.

§ 38. НЕРАВЕНСТВА И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Повторим и обобщим сведения о неравенствах из предыдущих классов и дополним их некоторыми новыми. В общем виде *неравенство с одной переменной* записывают так:

$$f(x)<g(x),\ f(x)>g(x),\ f(x)\le g(x),\ f(x)\ge g(x),\ \text{или}$$
$$\varphi(x)<0,\ \varphi(x)>0,\ \varphi(x)\le 0,\ \varphi(x)\ge 0.$$

Здесь $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторые функции от x.

Решением неравенства называют значения переменной, при которых неравенство является верным.

Два неравенства называют *равносильными*, если они имеют одни и те же решения, то есть если каждое решение первого неравенства удовлетворяет второе, а каждое решение второго неравенства удовлетворяет первое.

Неравенства, которые не имеют решений, также считают равносильными.

Неравенство A называют *следствием неравенства* B, если каждое решение неравенства B удовлетворяет и неравенство A. Записывают: $B \Rightarrow A$.

Два неравенства A и B равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Неравенства с переменными имеют много свойств, аналогичных свойствам уравнений.

1. Если из одной части неравенства перенесём в другую слагаемое с противоположным знаком, то получим неравенство, равносильное данному.

2. Если обе части неравенства умножим или поделим на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.

3. Если обе части неравенства умножим или поделим на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Используя эти свойства, неравенства с переменными решают подобно уравнениям.

Пример 1. Решите неравенство $5x - 7 \geq 2x + 5$.

Решение.

$(5x - 7 \geq 2x + 5) \Leftrightarrow (5x - 2x \geq 7 + 5) \Leftrightarrow (3x \geq 12) \Leftrightarrow (x \geq 4)$.

Ответ. $[4; \infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$.

Решение. ОДЗ: $x < 15$. Запишем неравенство в виде $\dfrac{3-x-\sqrt{15-x}}{\sqrt{15-x}} < 0$. Данное неравенство выполняется, если числитель и знаменатель имеют разные знаки, то есть, если имеет решение совокупность систем неравенств $\begin{cases} 3-x-\sqrt{15-x} < 0, \\ \sqrt{15-x} > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3-x-\sqrt{15-x} > 0, \\ \sqrt{15-x} < 0. \end{cases}$ Очевидно, что вторая система решений не имеет, а первую систему можно записать в виде $\begin{cases} \sqrt{15-x} > 3-x, \\ x < 15. \end{cases}$

Решим первое неравенство. Оно равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ 15-x > (3-x)^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3-x < 0; \\ 15-x > 0. \end{cases}$ Решением второй системы является промежуток (3; 15). Решим первую систему:

$\begin{cases} x \le 3, \\ 15 - x > 9 - 6x + x^2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \le 3, \\ x^2 - 5x - 6 < 0, \end{cases}$ отсюда $\begin{cases} x \le 3, \\ -1 < x < 6, \end{cases}$

поэтому $x \in (-1; 3]$.

Учитывая решения второй системы, получим общее решение неравенства: $x \in (-1; 15)$.

Ответ. $(-1; 15)$.

Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{5x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} \ge 0$.

Решение.

Для решения дробных неравенств используют равносильный переход к смешанной системе:

$$\left(\frac{5x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} \ge 0 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} (5x^2 - 2x - 3) \cdot (x^2 + x - 2) \ge 0, \\ x^2 + x - 2 \ne 0. \end{cases}$$

Упростим левую часть неравенства $(5x^2 - 2x - 3)(x^2 + x - 2) \ge 0$, разложив на множители многочлены: $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, $5x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(5x + 3)$. Получим равносильное ему неравенство $(x - 1)^2(x + 2)(5x + 3) \ge 0$. Решим его методом интервалов.

Уравнение $(x - 1)^2(x + 2)(5x + 3) = 0$ имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -0{,}6$. Обозначим их на числовой прямой в виде закрашенных и пустых кружочков, учитывая, что знаменатель не равен нулю. С помощью отдельных точек найдём знак функции $y = (x - 1)^2 (x + 2)(5x + 3)$ на каждом из образовавшихся промежутков (*рис. 170*).

Выбираем промежутки, на которых функция $y = (x - 1)^2 (x + 2)(5x + 3)$ имеет знак «+», и записываем ответ как объединение соответствующих промежутков и чисел, соответствующих закрашенным кружочкам.

Ответ. $(-\infty; -2) \cup [-0{,}6; 1) \cup (1; \infty)$.

Примечание. Если левую часть неравенства $\dfrac{5x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} \ge 0$ сократить на $x - 1$, то получим неравенство $\dfrac{5x + 3}{x + 2} > 0$, не равносильное данному.

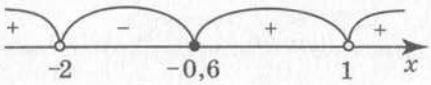


Рис. 170

Для решения некоторых неравенств применяют обобщённый метод интервалов.

Чтобы решить этим методом неравенство вида $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), где $f(x)$ — произвольная функция, нужно:

1) найти область определения функции $f(x)$;

2) определить все её нули, то есть решить уравнение $f(x) = 0$;

3) разбить с помощью найденных чисел область определения функции на промежутки знакопостоянства;

4) определить знак функции на каждом из образовавшихся промежутков;

5) записать ответ.

Этот способ можно использовать для решения неравенств, если можно найти область определения функции $f(x)$ и её нули. Решим этим методом неравенство $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$. Запишем его в виде

$$\frac{3-x-\sqrt{15-x}}{\sqrt{15-x}} < 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{3-x-\sqrt{15-x}}{\sqrt{15-x}}$. Её область определения: $x < 15$.

Находим корни уравнения $\frac{3-x-\sqrt{15-x}}{\sqrt{15-x}} = 0$. Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} x < 15, \\ \sqrt{15-x} = 3-x, \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 15, \\ x < 3, \\ 15-x = 9-6x+x^2. \end{cases}$

Решив эту систему, получим, что $x = -1$.

Итак, область определения функции точкой $x = -1$ делится на два промежутка знакопостоянства (*рис. 171*). Определив знак функции на каждом из промежутков, получим, что $x \in (-1; 15)$.

Неравенства решают и другими методами: заменой переменных (см. с. 41) и графически.

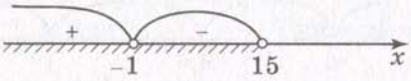


Рис. 171

Пример 4. Решите графически неравенство $3x^2 - 2 \geq x^{-2}$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = 3x^2 - 2$ и $y = x^{-2}$ (*рис. 172*). Ответ можно прочитать из рисунка, если найти абсциссы точек пересечения графиков.

Ответ. $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$.

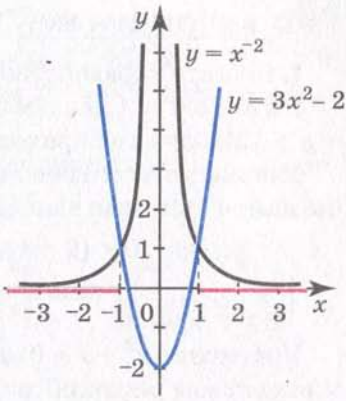


Рис. 172

Сложные неравенства графически решают с помощью специальных компьютерных программ. Например, на рисунке 173 представлены решения неравенства $x^4 - 2x^2 + 2 \leq \frac{1}{x^4 - x + 1}$ с помощью программы GRAN.

Ответ. $[\alpha; 1]$, где $\alpha \approx 0{,}69$.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Какие вы знаете виды неравенств? Приведите примеры.
2. Какие неравенства называют равносильными?
3. Сформулируйте свойства равносильных неравенств.
4. Что такое неравенство-следствие?
5. В чём состоит сущность обобщённого метода интервалов?
6. Какие вы знаете методы решения неравенств?

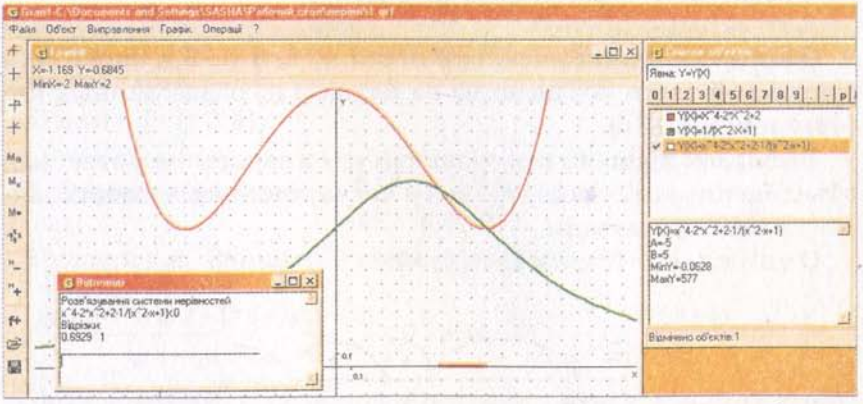


Рис. 173

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Решите неравенство $(x^2+x+1)(x^2+x+2)<2$.

Р е ш е н и е. Сделаем замену $x^2+x+1=y$, тогда $x^2+x+2=y+1$. Получим неравенство $y(y+1)<2$, или $y^2+y-2<0$.

Множеством его решений является промежуток $[-2;\,1]$. Чтобы найти искомые значения x, решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2+x+1<1, \\ x^2+x+1>-2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2+x<0, \\ x^2+x+3>0. \end{cases}$$

Уравнение $x^2+x=0$ имеет два корня: $x_1=-1$, $x_2=0$, поэтому множеством решений первого неравенства является промежуток $(-1;\,0)$. Уравнение $x^2+x+3=0$ не имеет корней, поэтому множеством решений второго неравенства является множество $\boldsymbol{R}$. Итак, решением системы (и заданного неравенства) является множество $(-1;\,0)\cap\boldsymbol{R}=(-1;\,0)$.

О т в е т. $(-1;\,0)$.

2. Решите неравенство $\dfrac{x^4-2x^3+9}{9-x^2}\le 1$.

Р е ш е н и е. Перенесём все члены неравенства в левую часть и сведём их к общему знаменателю. Получим равносильное неравенство $\dfrac{x^4-2x^3+x^2}{9-x^2}\le 0$, или $\dfrac{x^2(x^2-2x+1)}{(3-x)(3+x)}\le 0$, $\dfrac{x^2(x-1)^2}{(3-x)(3+x)}\le 0$. Последнее неравенство равносильно системе $\begin{cases} x^2(x-1)^2(3-x)(3+x)\le 0, \\ (3-x)(3+x)\ne 0. \end{cases}$

Обозначим на числовой оси точки 0, 1, 3 и -3 и определим знак левой части неравенства на каждом из образованных интервалов (*рис. 174*).

Выбираем промежутки со знаком «$-$» и записываем ответ как объединение этих промежутков и чисел, соответствующих закрашенным кружочкам.

О т в е т. $(-\infty;\,-3)\cup\{0,\,1\}\cup(3;\,\infty)$.

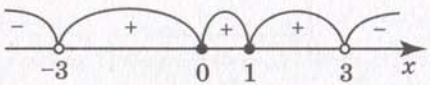


Рис. 174

3. Решите неравенство $8^x + 18^x - 2\cdot 27^x > 0$.

Р е ш е н и е. Запишем неравенство в виде $2^{3x} + 2^x\cdot 3^{2x} - 2\cdot 3^{3x} > 0$ и поделим обе части этого неравенства на $3^{3x} > 0$. Получим неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 2 > 0$, которое после замены $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ запишем в виде $t^3 + t - 2 > 0$, или $(t-1)(t^2 + t + 2) > 0$, отсюда $t > 1$. Возвращаясь к замене, получим, что $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} > 1$, отсюда $x < 0$.

О т в е т. $(-\infty; 0)$.

4. Решите неравенство $3\arccos x - 2\arcsin x > \frac{2\pi}{3}$.

Р е ш е н и е. Неравенство определено при $x \in [-1; 1]$. Поскольку $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то получим неравенство $3\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) - 2\arcsin x > \frac{2\pi}{3}$, или $5\arcsin x < \frac{5\pi}{6}$, отсюда $\arcsin x < \frac{\pi}{6}$.

По определению $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, поэтому получим неравенство $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x < \frac{\pi}{6}$. Берём синус от всех частей неравенства, учитывая, что на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right)$ синус возрастает. Получим, что $-1 \le x < 0{,}5$.

О т в е т. $[-1; 0{,}5)$.

5. Решите неравенство $\frac{\lg\sqrt{x+7} - \lg 2}{\lg 8 - \lg(x-5)} < -1$.

Р е ш е н и е. Запишем неравенство в виде

$$\frac{\lg\sqrt{x+7} - \lg 2 + \lg 8 - \lg(x-5)}{\lg 8 - \lg(x-5)} < 0, \text{ или } \frac{\lg 4\sqrt{x+7} - \lg(x-5)}{\lg 8 - \lg(x-5)} < 0.$$

Воспользуемся обобщённым методом интервалов. Для этого сначала найдём ОДЗ: $x > 5$ и $x \ne 13$, то есть $x \in (5; 13) \cup (13; \infty)$.

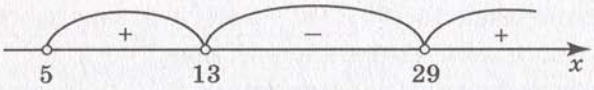


Рис. 175

Найдём решения уравнения $\dfrac{\lg 4\sqrt{x+7}-\lg(x-5)}{\lg 8-\lg(x-5)}=0$, то есть решим уравнение $\lg 4\sqrt{x+7}=\lg(x-5)$, или $16(x+7)=(x-5)^2$, отсюда $x^2-26x-87=0$. Корнями этого уравнения являются числа 29 и −3. Отрицательный корень не входит в ОДЗ. Нанесём найденные точки, соответствующие числам 5, 13 и 29, на числовую прямую и найдём знак левой части неравенства на каждом из полученных промежутков (*рис. 175*). Из рисунка видно, что $x\in(13;29)$.

Ответ. (13; 29).

Выполните устно

1355. Есть ли решением неравенства $3x-2>5x+1$ число:
а) 0; б) −10; в) 10; г) $(-2)^2$; д) -2^2?

1356. Имеет ли решения неравенство:
а) $x^4\le 0$; б) $|x|\ge -10$; в) $x^2<0$; г) $x^2>-1$; д) $|x-1|<-1$?

Решите неравенство (**1357—1358**).

1357. а) $2x\le 5$; б) $15\ge 3x$; в) $-5x<10$; г) $-0{,}5x>1$.

1358. а) $x^2<1$; б) $x^2>4$; в) $x^3\ge 8$; г) $x^3<-1$.

1359. Равносильны ли неравенства:
а) $x^2-4\le 0$ и $x\le 2$; б) $x+15\ge 3$ и $x+3\ge 15$;
в) $-0{,}5x>1$ и $4x+8<0$; г) $x^2-5<0$ и $(x-5)^2<0$?

Уровень А

1360. Какое наименьшее натуральное число является решением неравенства:
а) $4(x-1)<7x+2$; б) $4x-9\ge 3(x-2)$;
в) $2(3x-5)\le 5(2x-3)$; г) $5(x-2)+2>3x$?

1361. Какое наибольшее натуральное число является решением неравенства:
а) $4(x+2)>5(x-1)$; б) $3(2x-4)\ge 9x-17$;
в) $7(x-1)\le 17+5x$; г) $0{,}3(x-2)>0{,}5(x-3)-0{,}1$?

Решите неравенство (**1362—1367**).

1362. а) $3x^2-x-4\ge 0$; б) $5x^2-2x-3>0$;
в) $9x^2+6x+1\le 0$; г) $4x^2-12x+9<0$.

1363. а) $(2x+1)(x+1)>0$; б) $(3x-2)(2x+3)\geq 0$;
в) $(x-7)(3x+1)<0$; г) $(2x-5)(3x-6)>0$.

1364. а) $(x-1)(2-x)>0$; б) $(3+x)(x+7)<0$;
в) $(3-x)(5+x)\leq 0$; г) $(5-x)(1-x)\geq 0$.

1365. а) $\frac{x+3}{x-7}>0$; б) $\frac{x}{x+2}>0$; в) $\frac{2+x}{x+3}<0$; г) $\frac{3-x}{x}<0$.

1366. а) $\frac{x+3}{x-7}>1$; б) $\frac{x}{x+2}>2$; в) $\frac{2+x}{x+3}<2$; г) $\frac{3-x}{x}<1$.

1367. а) $\frac{7x}{2x+5}>1$; б) $\frac{x^2}{x+5}<0$; в) $\frac{x^2+1}{x-7}>0$; г) $\frac{3x-4}{x}<1$.

Решите неравенство методом интервалов (**1368—1370**).

1368. а) $(5+x)(x-7)(x+3)>0$; б) $(x+2)(x+1)(x-5)<0$.

1369. а) $(x+1)(x-2)(x+3)\leq 0$; б) $(x-2)(x+1)(x-11)<0$.

1370. а) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)}>0$; б) $\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)}>0$;

в) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+3)}>0$; г) $\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+5)}>0$.

1371. Решите неравенство графически:
а) $x^2<2+x$; б) $x^2>4x$; в) $x^3>2-x$.

Уровень Б

Решите неравенство (**1372—1373**).

1372. а) $8^{2-\frac{x}{3}}<4$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{6x+10-x^2}\geq\frac{8}{27}$;

в) $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x}\leq 1$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x^2+2}{x^2-1}}>9$.

1373. а) $\log_8(x^2-4x+3)<1$; б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(3+6x-x^2)\geq -2$;

в) $\log_2\frac{x+1}{x}>1$; г) $\lg\frac{x^2+2}{3x-7}>0$.

1374. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

а) $\sqrt{x+3}<5$; б) $\sqrt{4x+4}\geq\sqrt{5-x}$;

в) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^{1-x}<\frac{2}{3}$; г) $3^{8x-x^2}>1$.

1375. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

а) $\lg\frac{x+1}{x}>0$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{2x}<\frac{27}{64}$;

в) $\sqrt{11x-x^2}>2\sqrt{7}$; г) $\sqrt[4]{x+10}<2$.

Решите неравенство (**1376—1377**).

1376. а) $2\sin x>1$; б) $3\operatorname{tg}x>\sqrt{3}$;

в) $4\sin x\cos x\leq\sqrt{2}$; г) $\cos^2 x-\sin^2 x\geq 0{,}5$.

1377. а) $\frac{4}{x}+\frac{3}{x+3}\geq 1$; б) $\frac{5}{x+3}-2\leq\frac{x}{x-1}$; в) $\frac{2x+2}{x-5}+\frac{4x+5}{x+2}\geq 1$.

Решите неравенство методом интервалов (**1378—1380**).

1378. а) $(x+1)(x^2-2x+3)\leq 0$; б) $(x^2-x-2)(x-1{,}5)<0$;

в) $(x-2)(3x^2+x-2)^2\geq 0$; г) $(5x^2+2x-3)(x+6)^2\geq 0$.

1379. а) $(5-x)(x-7)^3(x+1)>0$; б) $(2-x)^3(x+1)(x-5)<0$;

в) $(x-x^2)(x+3)(x-1)\leq 0$; г) $(x^2-4)(x+3)(2x-4)\geq 0$.

1380. а) $\frac{x(x-1)(x+2)}{(x+3)(1-x)}>0$; б) $\frac{(x-2)(x-3)}{x(x^2+x+1)}>0$; в) $\frac{x^2-3x+2}{x(x-2)(x+3)}\leq 0$.

Решите неравенство методом замены переменной (**1381—1383**).

1381. а) $(x^2+2x+1)(x^2+2x+4)>10$; б) $(3x+1)^2<3x+1$.

1382. а) $(2x^2-5x-4)(2x^2-5x)<21$; б) $(3x+1)^2\geq(6x+2)$.

1383. а) $x(x+1)(x+2)(x+3)<24$;

б) $(x-2)(x+1)(x+2)(x+5)+20>0$.

1384. Решите неравенство графически:

а) $x^2<\frac{8}{x}$; б) $\frac{2}{x}\geq x-1$; в) $x^2\geq\frac{16}{x}$; г) $\frac{9}{x}>x$.

Решите неравенство (**1385—1388**).

1385. а) $\sqrt{x^2-3x+10}>x-2$; б) $\sqrt{x^2-x-12}<x$.

1386. а) $\sqrt[4]{x^2-9x+20}>-2$; б) $(x-3)\sqrt{x^2+4}\leq x^2-9$.

1387. а) $(3x^2-4x+1)\sqrt{25x^2-20x+3}\le 0$; б) $\sqrt{2+\frac{1}{x}}>\frac{1}{\sqrt{x}}$.

1388. а) $\frac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7}\le\frac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$; б) $\sqrt{x+6}-\sqrt{2x-5}>\sqrt{x+1}$.

Уровень В

Решите неравенство (**1389—1391**).

1389. а) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+18)-\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(x-4)<0$; б) $\log_x\frac{3x-1}{x^2+1}>0$;

в) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_4\left(\frac{x^2+3x-16}{x-1}\right)\right)<0$; г) $\log_{x+1}(x^2+x-6)\ge 4$.

1390. а) $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x<1$; б) $\sin 2x>\cos 2x$;
в) $\cos 2x\cos 5x<\cos 3x$; г) $3\cos^2 x\sin x-\sin^2 x<-1$.

1391. а) $x^4+3x^3-2x^2<6x-4$; б) $x^4-4x^3-13x^2+28x+12>0$;
в) $2x^4-5x^3-5x^2+2x\ge 0$; г) $x^4+2x^3-11x^2+4x+4<0$.

Решите неравенство методом замены переменной (**1392—1396**).

1392. а) $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x<6$; б) $\frac{x(x-1)}{(x^2-x+1)^2}\le\frac{2}{9}$;

в) $\frac{x}{x^2-3x+2}\le\frac{x}{x^2+3x+2}$; г) $\frac{x^2-13x+15}{x^2-14x+15}\le\frac{3x}{x^2-6x+15}$.

1393. а) $\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x>4$; б) $5\sin^2 x-3\sin x\cos x>36\cos^2 x$;
в) $\operatorname{tg}^3 x+3>3\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x$; г) $\sin^2 x-\cos^2 x<3\sin x+2$.

1394. а) $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\le\frac{1}{2}$; б) $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2>0$;

в) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2 4x>1$; г) $\log_3(3^x-1)\log_{\frac{1}{3}}(3^{x+2}-9)<-3$.

1395. а) $2^{2x+2}+6^x-2\cdot 3^{2x+2}>0$; б) $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9$;

в) $\sqrt{13^x-5}\le\sqrt{2(13^x+12)}-\sqrt{13^x+5}$; г) $\frac{2^{2x}+8-3\cdot 2^{x+1}}{3-2x-x^2}\ge 0$.

1396. а) $\left(2^{2-2\sqrt{x}}-3\cdot 2^{1-\sqrt{x}}+2\right)\sqrt{2-x}>0$; б) $\frac{4-7\cdot 5^x}{5^{2x+1}-12\cdot 5^x+4}\le\frac{2}{3}$;

в) $\dfrac{4-7|3^x-2|}{5\left(3^x-2\right)^2-12|3^x-2|+4}\le\dfrac{2}{3}$; г) $\left|3^{|\operatorname{tg}\pi x|}-3^{1-|\operatorname{tg}\pi x|}\right|\ge 2$.

Решите неравенство (1397—1401).

1397. а) $\sqrt{\dfrac{3+x-2x^2}{5x^2-x-1}}<1$; б) $(x+2)\sqrt{3-x}>\sin\dfrac{x}{2}\cdot\log_{\cos\frac{x}{2}}\left(2\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$;

в) $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$;

г) $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$.

1398. а) $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right)\ge 1$; б) $\log_4(3^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{3^x-1}{16}\le\dfrac{3}{4}$;

в) $\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}}x^2-3}>\sqrt{59}\log_4\dfrac{x^2}{4}$; г) $\log_9^2 x\ge\log_3^2\sqrt{1-\dfrac{x}{4}}$.

1399. а) $\dfrac{\log_2\left(\sqrt{4x+5}-1\right)}{\log_2\left(\sqrt{4x+5}+11\right)}>\dfrac{1}{2}$; б) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{-\log_2(2x)\log_2\left(\frac{2}{x}\right)}<(3{,}5)^{\log_2 x^3+3}$;

в) $\dfrac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}\left(x^2+4\right)}<0$; г) $\sqrt{4-x^2}\left(\log_3\left(x^2+2x+1\right)-1\right)\le 0$.

1400. а) $\dfrac{\sqrt[5]{2+\operatorname{ctg}x}+\sqrt[5]{1-\operatorname{ctg}x}}{x^2-7x+10}<0$; б) $(3-|x|)\sqrt{\dfrac{x-1}{5^x-25}}\ge 0$.

1401. а) $2\arcsin\left(x^2-x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)>\dfrac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{ctg}(2\arccos x)\ge 0$.

Упражнения для повторения

1402. Докажите, что при любом натуральном значении n число $\dfrac{n^3}{6}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{3}$ является натуральным.

1403. Решите уравнение:

а) $|2x-1|=5$; б) $|6-x|=2x$.

1404. Запишите в виде многочлена:

а) $(x^n+1)^2$; б) $(a^{2m}-1)^2$; в) $(a^n+a^m)^2$;

г) $(x^{n-1}-x)^2$; д) $\left(\frac{1}{2}y^m+y^{2m}\right)^2$; е) $\left(\frac{1}{4}b^n-2b^2\right)^2$.

§ 39. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Если заданы два или более уравнения с одной или несколькими переменными, для которых нужно найти значения переменной (переменных), удовлетворяющие всем заданным уравнениям, или выяснить, существуют ли такие значения, то говорят, что такие уравнения образуют *систему уравнений*, и обозначают её фигурной скобкой.

В общем виде систему m уравнений с n переменными записывают так:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \quad (*)$$

Значения переменных $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, …, $x_n = a_n$, или упорядоченную *n-ку* чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, которые удовлетворяют все уравнения системы, называют её *решением*.

Решить систему уравнений — значит найти все её решения, или сказать, что таких нет.

Система уравнений, имеющая, по крайней мере, одно решение, называется *совместимой*. Система, множество решений которой пустое, называется *несовместимой*.

Система уравнений называется *алгебраической*, если все её уравнения алгебраические. Если система содержит хотя бы одно трансцендентное уравнение, то она называется *трансцендентной*.

Областью допустимых значений системы (*) называется множество всех значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых выражения $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеют смысл $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Две системы уравнений с n переменными называются *равносильными* на некотором числовом множестве, если их решения на этом множестве равны.

Правильны такие утверждения о равносильных преобразованиях систем.

1. Если из одного уравнения системы (*) выразить одну какую-либо переменную через остальные, а затем подставить найденное выражение во все остальные уравнения системы, то получим новую систему, которая вместе с тем уравнением, из которого выражалась переменная, равносильна данной.

2. Если к одному из уравнений системы (*), умноженному на выражение $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеющее смысл и отличное от нуля на всей области определения D данной системы, добавить некоторые другие k её уравнений, умноженных соответственно на какие-либо выражения $\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1,2, \ldots, k)$, которые определены и не равны нулю на D, а остальные уравнения оставить без изменения, то получим систему, равносильную данной.

Систему A называют *следствием* системы B, если каждое решение системы B удовлетворяет и системе A. Записывают: $B \Rightarrow A$.

Чтобы решить систему, достаточно решить её следствие и из полученного множества решений отбросить те из них, которые данной системе не удовлетворяют. Это можно делать подстановкой.

Если одно из уравнений системы заменить его следствием, а другие уравнения оставить без изменений, то полученная система будет следствием данной.

Есть разные способы решения систем уравнений: *способ подстановки, способ линейных преобразований (алгебраического сложения), графический, разложения на множители, замены переменной, применения свойств функций.* Рассмотрим некоторые из них.

Метод подстановки. Решение систем этим методом состоит в том, что из какого-либо уравнения выражают одну из переменных через другую и найденное выражение подставляют в другое уравнение. В результате получают уравнение, решив которое, находят значение одной из переменных. Затем, подставив эти значения переменной в любое из данных уравнений, вычисляют соответствующие значения второй переменной.

Пример 1. Решите систему:

а) $\begin{cases} 2x^2 + 15xy + 4y^2 + 43x + 24y + 7 = 0, \\ x - 2y + 5 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ 2\lg(x+y) - \lg x = \lg 9. \end{cases}$

Решение. а) Из второго уравнения находим $x = 2y - 5$ и подставляем данное выражение в первое уравнение. Получим:

$2(2y-5)^2 + 15(2y-5)y + 4y^2 + 43(2y-5) + 24y + 7 = 0.$

После раскрытия скобок и возведения подобных членов получим:

$42y^2 - 5y - 158 = 0$, отсюда $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{79}{42} = -1\frac{37}{42}$.

Из равенства $x = 2y - 5$ находим: $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{184}{21} = -8\frac{16}{21}$.

Поскольку в процессе решения выполнялись только равносильные преобразования, то полученные значения переменных являются решениями данной системы.

б) Преобразуем каждое уравнение системы:

$$\begin{cases} 3^{y+2x} = 3^4, \\ \lg(x+y)^2 = \lg 9x, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y + 2x = 4, \\ (x+y)^2 = 9x. \end{cases}$$

Последняя система — следствие заданной. Решим её способом подстановки:

$$\begin{cases} y = 4 - 2x, \\ (4-x)^2 = 9x, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 4 - 2x, \\ 16 - 8x + x^2 = 9x, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 4 - 2x, \\ x^2 - 17x + 16 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = 16$.

Из равенства $y = 4 - 2x$ находим: $y_1 = 2$, $y_2 = -28$.

Следовательно, система-следствие имеет два решения (1; 2) и (16; −28). Подставим полученные решения в заданную систему и убедимся, что оба удовлетворяют её. Проверку выполните самостоятельно.

Ответ. а) $(-1; 2)$; $\left(-8\frac{16}{21}; -1\frac{37}{42}\right)$; б) (1; 2), (16; −28).

Метод линейных преобразований (алгебраического сложения). Решение систем этим методом базируется на утверждении 2. Чаще всего его используют для решения линейных систем, но есть много нелинейных систем и даже трансцендентных, когда метод линейных преобразований наиболее эффективный.

Пример 2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - xy = 5 + y^2, \\ y^2 + xy = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}25, \\ \sin x \sin y = 0{,}75. \end{cases}$

Решение. а) Сложим оба уравнения системы, получим уравнение $x^2 = 4$, отсюда $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Данная система равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} x=2, \\ y^2+xy=-1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=-2, \\ y^2+xy=-1. \end{cases}$$

Решив их, получим: $x_1=2$; $y_1=-1$; $x_2=-2$, $y_2=1$.

б) Сложим оба уравнения системы; получим уравнение $\cos x\cos y+\sin x\sin y=1$, или $\cos(x-y)=1$, отсюда $x-y=2\pi k$ (здесь и далее $k\in Z$).

Найдём разность уравнений системы:

$\cos x\cos y-\sin x\sin y=-0{,}5$, или $\cos(x+y)=-0{,}5$, отсюда $x+y=$

$=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ (здесь и далее $n\in Z$).

Последнее уравнение лучше представить в виде совокупности:

$$x+y=\frac{2\pi}{3}+2\pi n \text{ или } x+y=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n.$$

Запишем совокупность двух систем и решим каждую из них, найдя сумму и разность уравнений системы:

$$1)\ \begin{cases} x-y=2\pi k, \\ x+y=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \end{cases} \text{ отсюда } \begin{cases} x_1=\frac{\pi}{3}+\pi(n+k), \\ y_1=\frac{\pi}{3}+\pi(n-k); \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x-y=2\pi k, \\ x+y=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \end{cases} \text{ отсюда } \begin{cases} x_2=-\frac{\pi}{3}+\pi(n+k), \\ y_2=-\frac{\pi}{3}+\pi(n-k). \end{cases}$$

Поскольку в процессе решения выполнялись только равносильные преобразования, то полученные значения переменных являются решениями данной системы.

Ответ. а) $(2;-1)$ и $(-2;1)$;

$$\text{б)}\ \begin{cases} x_1=\frac{\pi}{3}+\pi(n+k), \\ y_1=\frac{\pi}{3}+\pi(n-k); \end{cases} \begin{cases} x_2=-\frac{\pi}{3}+\pi(n+k), \\ y_2=-\frac{\pi}{3}+\pi(n-k), \end{cases} (k\in Z, n\in Z).$$

Замена переменных. Этот метод применяется к решению различных видов систем как самостоятельный, так и в комбинации с другими методами. Рассмотрим, как его применяют для решения *симметричных* систем.

Система уравнений с двумя переменными x и y называется *симметричной*, если при замене переменных x на y и y на x она не изменяется.

Пример 3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x^2y+xy^2-6=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 16^x+16^y=13, \\ 4^{x+y}=6. \end{cases}$

Решение. а) Очевидно, что данная система симметрична. Преобразуем каждое из её уравнений, выделив выражения $x+y$ и xy. Получим:

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)+(xy)^3=17, \\ xy(x+y)=6, \end{cases}$$ или

$$\begin{cases} (x+y)((x+y)^2-3xy)+(xy)^3=17, \\ xy(x+y)=6. \end{cases}$$

Введём новые переменные $\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v. \end{cases}$ (*)

Выполним соответствующую замену и получим новую систему, равносильную данной.

$$\begin{cases} u(u^2-3v)+v^3=17, \\ uv=6, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u^3-3uv+v^3=17, \\ uv=6. \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение значение произведения uv, а второе уравнение возведём в куб:

$$\begin{cases} u^3+v^3=35, \\ u^3v^3=216, \end{cases} \text{ тогда } \begin{cases} u^3=27, \\ v^3=8 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u^3=8, \\ v^3=27. \end{cases}$$

Решениями последних систем являются пары чисел (3, 2) и (2, 3). Найдём переменные x и y, подставив в систему (*) значения u и v и решив её.

Если $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2, \end{cases}$ то $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

Такие же решения получим, если подставим пару (2, 3).

б) Очевидно, что данная система симметрична. Преобразуем каждое из её уравнений, используя свойства степеней. Получим:

$\begin{cases}(4^x)^2+(4^y)^2=13,\\ 4^x\cdot 4^y=6.\end{cases}$ Введём новые переменные $\begin{cases}4^x=a \quad (a>0),\\ 4^y=b \quad (b>0).\end{cases}$ (**)

Получим новую систему $\begin{cases}a^2+b^2=13,\\ a\cdot b=6,\end{cases}$ решениями которой являются пары (2; 3) и (3; 2).

Найдём переменные x и y.

Если $4^x=2$, а $4^y=3$, то $x=0{,}5$, а $y=\log_4 3$.

Если $4^x=3$, а $4^y=2$, то $x=\log_4 3$, а $y=0{,}5$.

Ответ. а) (1; 2), (2; 1); б) $(0{,}5;\ \log_4 3)$, $(\log_4 3;\ 0{,}5)$.

Существует много искусственных методов, используемых для решения определённых видов систем. Рассмотрим один из них.

Пример 4. Решите систему:

$$\begin{cases}x^2-xy+y^2=21,\\ y^2-2xy=-15.\end{cases}$$

Решения. Уравняем свободные члены:

$$\begin{cases}x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy=-15;\end{cases}\ \begin{vmatrix}5\\7\end{vmatrix}\ \begin{cases}5x^2-5xy+5y^2=105,\\ 7y^2-14xy=-105.\end{cases}$$

Сложим полученные уравнения. Получим:

$5x^2-19xy+12y^2=0$.

Поскольку $y\neq 0$ (это следует из второго уравнения), поделим обе части полученного уравнения на y^2:

$$5\left(\frac{x}{y}\right)^2-19\left(\frac{x}{y}\right)+12=0\text{, или } 5u^2-19u+12=0\text{, где } u=\frac{x}{y}.$$

Отсюда $u_1=3$, $u_2=\frac{4}{5}$. Следовательно, $x=3y$ или $x=\frac{4}{5}y$.

Подставив значение $x=3y$ в одно из данных уравнений, например, во второе, получим $y^2=3$, $y=\pm\sqrt{3}$, отсюда $x=\pm 3\sqrt{3}$.

Если взять $x=\frac{4}{5}y$, то получим $x=\pm 4$, $y=\pm 5$.

Ответ. $(3\sqrt{3};\ \sqrt{3})$, $(-3\sqrt{3};\ -\sqrt{3})$, (4; 5), (−4; −5).

К решению систем уравнений сводится много задач.

З а д а ч а. Студенты взяли на лодочной станции напрокат лодки. Сначала они проплыли 20 км вниз по течению реки, затем вернулись на лодочную станцию; вся эта прогулка длилась 7 часов. На обратном пути, на расстоянии 12 км от лодочной станции, студенты встретили плот, проплывающий мимо лодочной станции в тот момент, когда они отправлялись на прогулку. Определите, скорость движения лодки по течению и скорость течения реки.

Р е ш е н и е. Если обозначить скорость лодки в стоячей воде через x (км/ч), скорость течения, а следовательно, и скорость плота через y (км/ч), то скорость лодки по течению будет $x+y$, а против течения $x-y$; время движения лодки (в часах) по течению $\frac{20}{x+y}$, против течения $\frac{20}{x-y}$, до встречи с плотом $\frac{20}{x+y}+\frac{8}{x-y}$ и, наконец, время движения плота $\frac{12}{y}$.

Поскольку прогулка длилась 7 ч, то получим уравнение

$$\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}=7.$$

Время движения лодки и плота до их встречи было одним и тем же. Поэтому

$$\frac{20}{x+y}+\frac{8}{x-y}=\frac{12}{y}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}=7,\\ \frac{20}{x+y}+\frac{8}{x-y}=\frac{12}{y},\end{cases}$$

находим $x=7$, $y=3$. Следовательно, скорость лодки по течению равна 10 км/ч, скорость течения — 3 км/ч.

О т в е т. 10 км/ч; 3 км/ч.

П р и м е ч а н и е. Задачу можно решить более рационально, если систему координат «привязать» к плоту. Тогда можно получить уравнение $\frac{20}{x+y}=\frac{8}{x-y}$ и т. д.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Что понимают под системой уравнений с несколькими переменными?
2. Что называют решением системы двух уравнений с двумя переменными?
3. Какая система называется совместимой?
4. Какие системы называются равносильными?
5. Сформулируйте утверждения о равносильных преобразованиях систем.
6. Назовите основные способы решения систем уравнений.

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = 2x^2 - 2x - 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Графиком первого уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом 3, графиком второго — парабола с вершиной в точке (0,5; −3,5). Построим эти графики в одной системе координат (*рис. 176*). Они пересекаются в четырёх точках, координаты которых приближённо равны (0; −3), (−1,2; 2,7), (1,1; −2,8), (2,2; 2,0). Проверкой устанавливаем, что (0; −3) — точное решение.

О т в е т. (0; −3), (−1,2; 2,7), (1,1; −2,8), (2,2; 2,0).

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2}, \\ x^4 - y^4 = 144; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos^4 x + 4\sin^4 y = 1, \\ 2\sin\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{x+y}{2} = \cos\dfrac{x}{2}. \end{cases}$

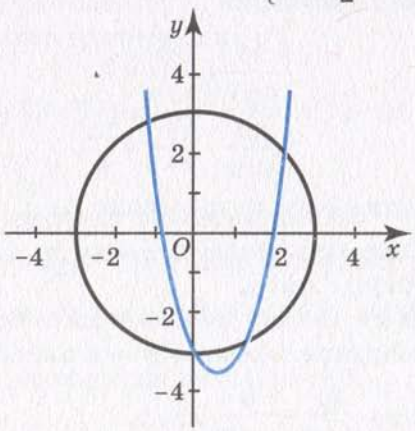


Рис. 176

Р е ш е н и е. а) Область допустимых значений системы: $x^2 \geq y^2$, $y \geq 0$.

Первое уравнение системы дважды возводим в квадрат, каждый раз упрощая. Имеем: $y^2 = x^2 + y^2 + x^2 - y^2 - 2\sqrt{x^4 - y^4}$, или $y^2 = 2x^2 - 24$, поскольку из второго уравнения системы видно, что $\sqrt{x^4 - y^4} = 12$.

$y^4 = 4x^4 - 96x^2 + 576$, или $x^4 - 144 = 4x^4 - 96x^2 + 576$. Отсюда $3x^4 - 96x^2 + 720 = 0$, или $x^4 - 32x^2 + 240 = 0$.

Корнями последнего уравнения являются числа $\pm\sqrt{20}$ и $\pm\sqrt{12}$. Подставим эти значения x в уравнение $y^2 = 2x^2 - 24$ и найдём значение y.

Если $x = \pm\sqrt{20}$, то $y^2 = 16$, отсюда $y_1 = 4$, $y_2 = -4$.

Если $x = \pm\sqrt{12}$, то $y^2 = 0$, отсюда $y_3 = y_4 = 0$.

Учитывая ОДЗ системы, получим такие её решения:

$(-\sqrt{20}\,; 4)$, $(\sqrt{20}\,; 4)$, $(\sqrt{12}\,; 0)$, $(-\sqrt{12}\,; 0)$, или

$(-2\sqrt{5}\,; 4)$, $(2\sqrt{5}\,; 4)$, $(2\sqrt{3}\,; 0)$, $(-2\sqrt{3}\,; 0)$.

б) Преобразуем второе уравнение системы следующим образом: $\cos\frac{x}{2} - \cos\left(\frac{x}{2} + y\right) = \cos\frac{x}{2}$, или $\cos\left(\frac{x}{2} + y\right) = 0$ и решим его.

Если $\cos\left(\frac{x}{2} + y\right) = 0$, то $\frac{x}{2} + y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, или $x = -2y + \pi + 2\pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

Подставим полученное значение x в первое уравнение системы. Получим:

$\cos^4(-2y + \pi + 2\pi k) + 4\sin^4 y = 1$, или $\cos^4 2y + 4\sin^4 y = 1$.

Поскольку $2\sin^2 y = 1 - \cos 2y$, то $4\sin^4 y = 1 - 2\cos 2y + \cos^2 2y$.

Обозначим $\cos 2y = a$, тогда получим уравнение $a^4 + 1 - 2a + a^2 = 1$, или $a^4 + a^2 - 2a = 0$, корни которого $a = 0$ и $a = 1$.

Если $a = 0$, то $\cos 2y = 0$, отсюда $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Если $a = 1$, то $\cos 2y = 1$, отсюда $y = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Найдём соответствующие значения x.

Если $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2k - m)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Если $y=\pi n$, то $x=\pi+2\pi(k-n)$, $n\in Z$, $k\in Z$.

Ответ. а) $(-2\sqrt{5}\,;4)$, $(2\sqrt{5}\,;4)$, $(-2\sqrt{3}\,;0)$, $(2\sqrt{3}\,;0)$;

б) $\begin{cases}x_1=\dfrac{\pi}{2}+\pi(2k-m),\\ y_1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi m}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\pi+2\pi(k-n),\\ y_2=\pi n;\end{cases}$ $m\in Z, k\in Z, n\in Z.$

Выполните устно

1405. Какая из пар чисел (1; 0), (0; 1) и (1; 1) является решением системы уравнений:

а) $\begin{cases}x+y=1,\\ xy=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=1,\\ x-y=1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x-y=1\\ 2-xy=2?\end{cases}$

1406. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases}x+y=1,\\ x-y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=0,\\ x^2+y^2+1=0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x-y=1,\\ 2+x=y?\end{cases}$

Уровень А

Решите систему уравнений способом подстановки (**1407—1410**).

1407. а) $\begin{cases}x-y=3,\\ x^2+y^2=9;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-y=3,\\ xy=4;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2+xy=2,\\ y-3x=7.\end{cases}$

1408. а) $\begin{cases}x^2+y^2=100,\\ x-6=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x+1=0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+y=5,\\ xy=4.\end{cases}$

1409. а) $\begin{cases}x-y=1,\\ x^3-y^3=7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-y=8,\\ 2x^2-y^2=32;\end{cases}$ в) $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=45,\\ x+y=5.\end{cases}$

1410. а) $\begin{cases}\lg x-\lg y=2,\\ x-10y=900;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\lg x-\lg y=7,\\ \lg x+\lg y=5;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+y=7,\\ \lg x+\lg y=1.\end{cases}$

Решите систему уравнений способом алгебраического сложения (**1411—1412**).

1411. а) $\begin{cases}x^2+y^2=41,\\ xy=20;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+z^2=34,\\ xz=15;\end{cases}$ в) $\begin{cases}4^x+9^y=30,\\ 2^{2x}-3^{2y}=2.\end{cases}$

1412. а) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2-y^2=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2+xy=10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \log_2 x+\log_2 y=3, \\ \log_2 x-\log_2 y=1. \end{cases}$

Решите графически систему уравнений **(1413—1414)**.

1413. а) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2+y^2=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy=-12, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=2, \\ y=2^{x-1}. \end{cases}$

1414. а) $\begin{cases} -x+y=2, \\ xy=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4+y=x^2, \\ 2x+y=-1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=2\log_3(x+3), \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$

Решите ***задачи Магавиры*** (IX в.) **(1415—1416)**.

1415. Во время боя петухов один из зрителей договорился с двумя владельцами петухов. Первому он сказал: «Если победит твой петух, то выигрыш отдашь мне, если же проиграешь, то я заплачу тебе $\frac{2}{3}$ твоего возможного выигрыша». Второму участнику он сказал: «Если победит твой петух, то выигрыш отдашь мне, если же проиграешь, я заплачу тебе $\frac{3}{4}$ возможного выигрыша». В обоих случаях зритель получит 12 монет. Каким должен быть выигрыш каждого участника боя?

1416. Плоды граната, манго и лесных яблок продаются соответственно по 3 шт. за 2 монеты, 5 шт. за 3 монеты, 7 шт. за 5 монет. Как за 76 монет купить столько плодов, чтобы плодов манго было в 3 раза, а гранатов в 6 раз больше, чем лесных яблок?

Уровень Б

Решите систему уравнений **(1417—1418)**.

1417. а) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{34}{15}, \\ x^2+y^2=34; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=5{,}2, \\ x^2-y^2=24; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=8, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3}. \end{cases}$

1418. а) $\begin{cases} x^2y+xy^2=6, \\ xy+x+y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^4-y^4=15, \\ x^3y-xy^3=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-2y=0, \\ 5xy+y^2=44. \end{cases}$

1419. ***Задача Абу Ал-Караджи*** (X—XI вв.). Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ xz=y^2, \\ xy=10. \end{cases}$

Решите систему уравнений (**1420—1422**).

1420. а) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+3y^2)=-2, \\ \log_5(|x|-y)=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_2 x+\log_x 8=4, \\ \log_4(x+y)=\frac{3}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy=10, \\ (\lg x)(\lg y)=-2. \end{cases}$

1421. а) $\begin{cases} x^4+y^4=2, \\ x^6+y^6=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=x+y, \\ x^4+y^4=\frac{(x+y)^2}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x^4+y^4}{17}=(x+y)^2, \\ xy=2(x+y). \end{cases}$

1422. а) $\begin{cases} 2\cos^2 9x=1+\cos 10x, \\ \cos 9x+\sin 5x=1, \\ |x|<5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x+\sin y=\frac{3}{2}, \\ \cos x+\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Уровень В

Решите систему уравнений (**1423—1429**).

1423. а) $\begin{cases} 2x^2-5xy+3x-2y=2, \\ 5xy-2x^2+7x-8y=-22; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2-3xy+2y^2=14, \\ x^2+xy-y^2=5. \end{cases}$

1424. а) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}, \\ |x+y|=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}-1=\frac{13}{\sqrt{xy}}, \\ \sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=10. \end{cases}$

1425. а) $\begin{cases} \cos 2x=\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{4}\right), \\ \cos 2y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right); \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4\operatorname{tg} 3x=3\operatorname{tg} 2y, \\ 2\sin x\cos(x-y)=\sin y. \end{cases}$

1426. а) $\begin{cases} y^2-|xy|+2=0, \\ 8-x^2=(x+2y)^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |xy-2|=6-x^2, \\ 2+3y^2=2xy. \end{cases}$

1427. а) $\begin{cases}\sin x+\cos x=2+\sin y+\cos y,\\ 2\sin 2x+\sin 2y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^3 y,\\ \sin x=\cos 2y.\end{cases}$

1428. а) $\begin{cases}2^{\sin x+\cos y}=2,\\ 16^{\sin^2 x-\cos^2 y}=4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}4^{\sin x}-3\cdot 2^{\sin x+\sin y}+2\cdot 4^{\sin y}=0;\\ \log_{\sqrt{2}\cos x}(1+\sin y)=2.\end{cases}$

1429. а) $\begin{cases}x\cdot 2^{x-y+1}+3y\cdot 2^{2x+y}=2,\\ 2x\cdot 2^{2x+y}+3y\cdot 8^{x+y}=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(3x+y)^{x-y}=9,\\ \sqrt[x-y]{324}=18x^2+12xy+2y^2.\end{cases}$

Решите ***задачи Леонардо Фибоначчи*** (XIII в.) **(1430—1431).**

1430. Трое имеют некоторую сумму денег, при этом деньги первого составляют половину, второго — треть, а третьего — шестую часть всей суммы. Желая сэкономить часть денег, каждый берёт из общей суммы столько, сколько может унести, после чего первый отдаёт на сохранение половину, второй — треть, а третий — шестую часть из того, что он нёс. Через некоторое время они берут эти деньги, и каждому приходится получать $\frac{1}{3}$ всей суммы, которая была на сохранении. Сколько денег было у каждого?

1431. Увеличив или уменьшив число — точный квадрат на 5, получим точный квадрат. Найдите это число.

Упражнения для повторения

1432. Решите уравнение: а) $x^4+4x^2-5=0$; б) $x^3+x-2=0$.

1433. Решите неравенство: а) $x^2-4>0$; б) $x^2+3x-18\le 0$; в) $x^2+10x\ge 0$; г) $(x-1)^2(x+3)(x-2)\ge 0$.

1434. Постройте график функции: а) $y=(x-2)^2-3$; б) $y=\frac{6}{x+4}+2$.

§ 40. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Специалистам часто приходится иметь дело с уравнениями, которые, кроме неизвестных переменных и известных чисел, содержат и параметры. *Параметр* в уравнении или неравенстве — это постоянная, значение которой при необходимости можно изменять. Уравнение может иметь несколько переменных и несколько параметров, которые обозначаются разными буквами.

! Решить уравнение (неравенство или систему) с параметром означает для каждого значения параметра указать, имеет ли уравнение (неравенство или система) решения и какие они.

Рассмотрим примеры решения задач с параметрами.

Пример 1. Решите уравнение $(a^2 - 4)x = a^2 + a - 2$.

Решение. Задано линейное уравнение относительно переменной x. Переменная a здесь — параметр. Данному уравнению равносильно уравнение $(a - 2)(a + 2)\,x = (a - 1)(a + 2)$.

Если $(a - 2)(a + 2) \neq 0$, то есть $a \neq 2$ и $a \neq -2$, то уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{(a-1)(a+2)}{(a-2)(a+2)} = \dfrac{a-1}{a-2}$.

Если $a = 2$, то уравнение имеет вид $0x = 4$, и поэтому корней не имеет. Если $a = -2$, то уравнение имеет вид $0x = 0$, решением которого является любое число.

Ответ. Если $a \in (-\infty, -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$, то $x = \dfrac{a-1}{a-2}$; если $a = -2$, то корнем уравнения является каждое действительное число; если $a = 2$, то уравнение корней не имеет.

Пример 2. Решите уравнение $ax^2 + 4x + a + 3 = 0$.

Решение. Если $a = 0$, то равнение имеет вид $4x + 3 = 0$ и его единственный корень $x = -0{,}75$.

Если $a \neq 0$, то $ax^2 + 4x + a + 3 = 0$ — квадратное уравнение относительно переменной x.

Найдём его дискриминант.

$D = 16 - 4 \cdot a \cdot (a + 3) = -4a^2 - 12a + 16$.

Данное уравнение имеет корни $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{D}}{2a}$, если $D \geq 0$, то есть если $-4a^2 - 12a + 16 \geq 0$, или $a^2 + 3a - 4 \leq 0$.

Множество решений последнего неравенства, при условии $a \neq 0$, таково: $[-4; 0) \cup (0; 1]$.

Рассмотрим два случая. Если $D = 0$, то $x = \dfrac{-2}{a}$. В этом случае, если $a = -4$, то $x = 0{,}5$, а если $a = 1$, то $x = -2$.

Если $D > 0$, то есть $a \in (-4; 0) \cup (0; 1)$, уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 3a - a^2}}{a}$.

О т в е т. Если $a \in (-\infty, -4) \cup (1; \infty)$, то действительных корней нет; если $a = -4$, то $x = 0{,}5$; если $a = 0$, то $x = -0{,}75$; если $a = 1$, то $x = -2$; если $a \in (-4; 0) \cup (0; 1)$, то $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 3a - a^2}}{a}$.

Если требуется определить количество корней уравнения при определённых значениях параметра, то целесообразно использовать графический метод.

П р и м е р 3. При каком значении параметра a уравнение $|x^2 - 6|x| + 5| = a$ имеет наибольшее количество корней? Может ли количество корней быть нечётным?

Р е ш е н и е. Построим в одной системе координат графики функций $y = |x^2 - 6|x| + 5|$ и $y = a$ (*рис. 177*).

Видим, что уравнение может иметь:

1) 2 корня (прямая p_1), если $a > 5$;

2) 3 корня (прямая p_2), если $a = 5$;

3) 4 корня (прямая p_3), если $4 < a < 5$;

4) 6 корней (прямая p_4), если $a = 4$;

5) 8 корней (прямая p_5), если $0 < a < 4$;

6) 4 корня (прямая p_6), если $a = 0$;

7) 0 корней (прямая p_7), если $a < 0$.

О т в е т. Если $0 < a < 4$, то уравнение имеет наибольшее количество корней: 8. Если $a = 5$, то уравнение имеет нечётное количество корней: 3.

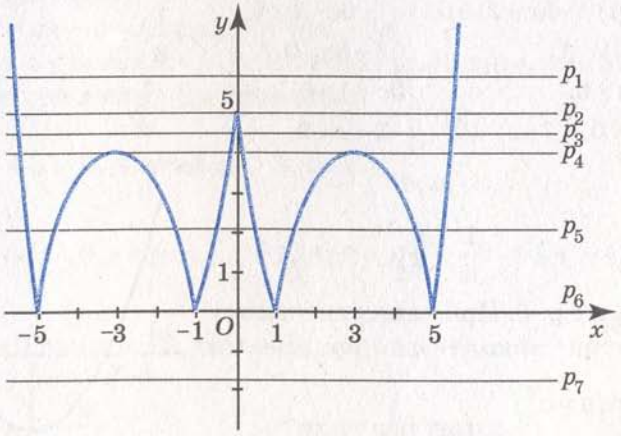


Рис. 177

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_2 2|x| + \log_2 (2 - x) = \log_2 (\lg a)$ имеет единственное решение.

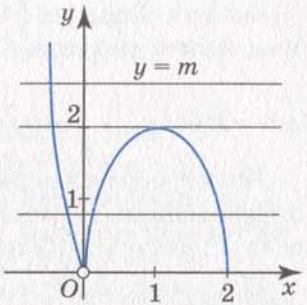


Рис. 178

Решение. Запишем данное уравнение в виде $\log_2 (2|x|(2 - x)) = \log_2 (\lg a)$, или $2|x|(2 - x) = \lg a$, где $\lg a$ — некоторое число. Обозначим его m ($\lg a = m$) и решим графически уравнение $2|x|(2 - x) = m$, где $x < 2$, $x \neq 0$ и $m > 0$. Из рисунка 178 видно, что единственное решение данное уравнение будет иметь при $m > 2$, т. е. при $\lg a > 2$, отсюда $a > 100$, то есть $a \in (100; \infty)$.

Ответ. $a \in (100; \infty)$.

Пример 5. При каких значениях параметра c корни уравнения $x^2 + (c - 1)x + c + 2 = 0$ принадлежат промежутку $(-4; 2)$.

Решение. Чтобы данное уравнение имело действительные корни, необходимо, чтобы его дискриминант был неотрицательным, т. е. $(c - 1)^2 - 4(c + 2) \geq 0$. Чтобы нули функции $f(x) = x^2 + (c - 1)x + c + 2$ принадлежали промежутку $(-4; 2)$, нужно, чтобы значения $f(-4)$ и $f(2)$ были положительными, а абсцисса вершины параболы лежала между концами данного промежутка (*рис. 179*). Следовательно, искомые значения параметра c должны удовлетворять систему неравенств:

$$\begin{cases} (c-1)^2 - 4(c+2) \geq 0, \\ f(-4) > 0, \\ f(2) > 0, \\ -4 < 0{,}5(1-c) < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} c^2 - 6c - 7 \geq 0, \\ 22 - 3c > 0, \\ 3c + 4 > 0, \\ -3 < c < 9; \end{cases} \quad \begin{cases} (c+1)(c-7) \geq 0, \\ c < 7\frac{1}{3}, \\ c > -1\frac{1}{3}, \\ -3 < c < 9. \end{cases}$$

Ответ. $c \in (-1\frac{1}{3}; -1] \cup [7; 7\frac{1}{3})$.

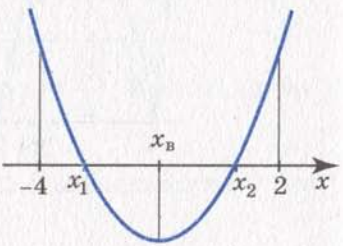


Рис. 179

Пример 6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y = a^2, \\ \sin y \cos x = a \end{cases}$$

имеет решения?

Р е ш е н и е. Найдём сумму и разность уравнений системы.

Получим: $\begin{cases}\sin x\cos y+\sin y\cos x=a^2+a,\\ \sin x\cos y-\sin y\cos x=a^2-a,\end{cases}$ или $\begin{cases}\sin(x+y)=a^2+a,\\ \sin(x-y)=a^2-a.\end{cases}$

Эта система будет иметь решения тогда и только тогда, когда

$\begin{cases}|a^2+a|\le 1,\\ |a^2-a|\le 1,\end{cases}$ т. е. при условии, что $\begin{cases}a^2+a\le 1,\\ a^2+a\ge -1,\\ a^2-a\le 1,\\ a^2-a\ge -1,\end{cases}$ или $\begin{cases}a^2+a-1\le 0,\\ a^2+a+1\ge 0,\\ a^2-a-1\le 0,\\ a^2-a+1\ge 0.\end{cases}$

Второе и четвёртое неравенства системы выполняются для всех $x\in R$, ибо $D<0$. Решим систему $\begin{cases}a^2+a-1\le 0,\\ a^2-a-1\le 0,\end{cases}$ отсюда находим, что $a\in\left[-\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ (убедитесь в этом самостоятельно).

О т в е т. $a\in\left[-\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

П р и м е р 7. Решите неравенство $3(2a-x)<a(x+1)$.

Р е ш е н и е. Раскроем скобки и перенесём все члены неравенства в одну часть:

$6a-3x-ax-a<0$, или $(3+a)x>5a$.

Если $3+a=0$, то есть $a=-3$, неравенство имеет вид $0x>-15$. Оно верное при любых значениях x.

Если $3+a>0$, то есть $a>-3$, то $x>\frac{5a}{3+a}$.

Если $3+a<0$, то есть $a<-3$, то $x<\frac{5a}{3+a}$.

О т в е т. Если $a=-3$, то $x\in R$; если $a>-3$, то $x>\frac{5a}{3+a}$; если $a<-3$, то $x<\frac{5a}{3+a}$.

Пример 8. Решите неравенство $a^{\log_a^2 x}+x^{\log_a x}<2a$.

Решение. В соответствии с основным логарифмическим тождеством $a^{\log_a x}=x$, тогда $x^{\log_a x}=\left(a^{\log_a x}\right)^{\log_a x}=a^{\log_a^2 x}$. Поэтому данное неравенство можно записать в виде $2a^{\log_a^2 x}<2a$, или $a^{\log_a^2 x}<a$. Оно равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ \log_a^2 x<1,\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ \log_a^2 x>1,\end{cases}\end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ -1<\log_a x<1,\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ \left[\begin{array}{l}\log_a x>1,\\ \log_a x<-1,\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \text{ отсюда } \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ x\in\left(\frac{1}{a};a\right),\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ x\in(0;a)\cup\left(\frac{1}{a};\infty\right).\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ. Если $a\in(0;1)$, то $x\in(0;a)\cup\left(\frac{1}{a};\infty\right)$; если $a\in(1;\infty)$, то $x\in\left(\frac{1}{a};a\right)$; если $a\in(-\infty;0]\cup\{1\}$, то неравенство решений не имеет.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

1. Какое уравнение называют уравнением с параметром?
2. Приведите примеры уравнений с параметром.
3. Приведите примеры неравенств с параметром.
4. Что означает решить уравнение (неравенство) с параметром?
5. Как решают задачи с параметром, в которых требуется определить количество или наличие корней?

ВЫПОЛНИМ ВМЕСТЕ

1. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2-2(a^2-2)x+a^4>0$ верное для всех $x\in R$.

Решение. Первый коэффициент квадратного трёхчлена $x^2-2(a^2-2)x+a^4$ положительный, поэтому множество решений неравенства зависит только от знака дискриминанта трёхчлена. $\frac{D}{4}=(a^2-2)^2-a^4=-4a^2+4$.

Квадратный трёхчлен принимает только положительные значения, если график функции не пересекает ось абсцисс, т.е. если $D < 0$. Поэтому нужно решить неравенство $-4a^2 + 4 < 0$, отсюда $a^2 > 1$, то есть $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

Следовательно, если $a \in (-\infty, -1) \cup (1; \infty)$, то множество решений неравенства $x^2 - 2(a^2 - 2)x + a^4 > 0$ — вся числовая прямая.

Ответ. $a \in (-\infty, -1) \cup (1; \infty)$.

2. При каких значениях параметра a на промежутке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ уравнение $2\sin^2 3x - (2a+1)\sin 3x + a = 0$ имеет ровно три корня? Найдите эти корни.

Решение. Сделаем замену: $\sin 3x = t$, $|t| \le 1$. Тогда уравнение будет иметь вид

$2t^2 - (2a+1)t + a = 0$. Решим его.

$D = 4a^2 + 4a + 1 - 8a = 4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2$.

$$t_1 = \frac{2a+1+2a-1}{4} = a, \quad t_2 = \frac{2a+1-2a+1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Тогда $\sin 3x = a$ или $\sin 3x = \frac{1}{2}$.

Если $x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$, то $3x \in [2\pi; 3\pi]$. На промежутке $[2\pi; 3\pi]$ уравнение $\sin 3x = \frac{1}{2}$ имеет ровно два решения: $3x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$ и $3x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$. Тогда уравнение $\sin 3x = a$ на этом промежутке должно иметь только одно решение. А это будет в случае, когда $a = 1$.

Следовательно, уравнение имеет три корня, если $a = 1$. Найдём эти корни.

Если $3x = \frac{13\pi}{6}$, то $x = \frac{13\pi}{18}$. Если $3x = \frac{17\pi}{6}$, то $x = \frac{17\pi}{18}$. Если $\sin 3x = 1$, то $3x = \frac{5\pi}{2}$, а $x = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ. $a = 1$, $x \in \left\{\frac{13\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

3. Решите неравенство $\sqrt[3]{x+2a}+\sqrt[3]{x-a}<\sqrt[3]{3a}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся свойством монотонной функции: если функция $f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой и в точке x_0 выполняется условие $f(x_0)=m$ (m — постоянная), то решением неравенства $f(x_0)<m$ ($f(x_0)>m$) является интервал $(-\infty; x_0)$ ($(x_0; \infty)$).

Функция $f(x)=\sqrt[3]{x+2a}+\sqrt[3]{x-a}$ является возрастающей, как сумма двух возрастающих функций. Если $x=a$, то $f(a)=\sqrt[3]{a+2a}+\sqrt[3]{a-a}=\sqrt[3]{3a}$. Итак, решением данного неравенства является интервал $(-\infty; a)$.

О т в е т. $x\in(-\infty; a)$, если $a\in R$.

Выполните устно

1435. Решите уравнение: а) $|x-2|=a$; б) $|x-a|=2$; в) $|x-a|=-2$.

1436. Решите неравенство: а) $2x<a$; б) $ax<1$; в) $\frac{x}{a}<2$.

1437. При каких значениях параметра b уравнение не имеет решений: а) $|x-3|=b+2$; б) $\frac{x-1}{b}=2b$; в) $x^2-x+b=0$?

1438. При каких значениях параметра a число 2 является корнем уравнения:
а) $x^2-2x+a=0$; б) $x^2-2a+4=0$; в) $ax^2+2x+4=0$?

1439. При каких значениях параметра m имеет единственное решение уравнение $mx^2+x+m=0$?

Уровень А

1440. Решите уравнение:
а) $(a^2-9)x=a^2-a-6$; б) $(a^2-3a+2)x=8-2a-a^2$.

1441. Решите неравенство:
а) $(a^2-9)x\geq a^2+2a-3$; б) $(a^2-2a)x\leq 8-2a-a^2$.

1442. Решите уравнение:
а) $x^2-ax-2a^2=0$; б) $ax^2-(a+2)x+2=0$.

1443. Решите неравенство:
а) $x^2-(2a+1)x+a^2+a\geq 0$; б) $x^2-(2a-2)x+a^2-2a<0$.

1444. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}2x-3<3(x+4),\\ x\leq a;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-7x+10\geq 0,\\ x\geq a.\end{cases}$

1445. Решите неравенство:

а) $(x-4)(x-a)<0$; б) $(x-1)(x-a)\geq 0$;

в) $(x^2-4)(x-a)<0$; г) $(x-2)^2(x-a)\geq 0$.

1446. При каком значении параметра c уравнение $\dfrac{x^2-(c+1)x+c}{x^2-4x}=0$ имеет только один корень?

1447. При каком значении параметра m имеет единственный положительный корень уравнение $m(3x-m)=3x-1$?

1448. При каком значении b уравнение $x^2-(2b-1)x+b^2-b=2$ имеет: а) два положительных корня; б) корни разного знака?

1449. При каком значении параметра a принадлежат отрезку $[-1, 6]$ корни уравнения $x^2-(3a+1)x+2a(a+1)=0$?

1450. При каком значении параметра a множеством решений неравенства $|x-2a|\leq a+1$ является отрезок $[-3; 2]$?

1451. При каком значении параметра a неравенство выполняется для всех действительных значений x:

а) $x^2-(a-2)x+4>0$; б) $x^2-2ax+a^2-2a+3>0$?

1452. При каких значениях b функция $y=x^2+2(b-1)x+4-b-b^2$ принимает положительные значения для всех действительных значений x?

1453. Для каждого значения параметра a определите количество корней уравнения:

а) $|x^2-2x-3|=a$; б) $|5+4x-x^2|=a$;

в) $||x-2|-3|=a$; г) $|3-|x||=a$.

1454. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений имеет единственное решение:

а) $\begin{cases} x^2+(y-a)^2=9, \\ y=-6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2+a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ (x-4)^2+y^2=1. \end{cases}$

1455. Решите уравнение $\sqrt{a-x^2}=x+1$.

1456. При каких значениях параметра a уравнение $\sin x=0{,}5(a+3)$ имеет решение: а) $x=\dfrac{\pi}{6}$; б) $x=\dfrac{5\pi}{6}$?

1457. При каких значениях параметра p имеет решения уравнение $4\sin^2 x-8\cos^2 x=5-3p$? Найдите эти решения.

1458. При всех действительных значениях параметра a решите неравенство $25^x-5^x-a-a^2<0$.

Уровень Б

1459. При каком значении параметра p имеет только два корня уравнение $x^4-(2p-1)x^2+p^2-p=0$?

1460. Найдите область определения функции $y=\sqrt{x^2-(a+3)x+3a}$.

1461. При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(m-2)x-m+1=0$ является наименьшей?

1462. При каком значении a функция $y=2ax^2-(a^2+7a-4)x+5$ достигает наибольшего значения в точке $x=1$?

1463. При каком значении параметра a наименьшее значение функции $y=x^2-2(a+2)x+a^2+4a$ равно $5-a^2$?

1464. Найдите все значения параметра p, при которых двойное неравенство $-7<\dfrac{x^2+(p+1)x-5}{x^2-x+1}<3$ выполняется для всех $x\in R$.

1465. При каких значениях a неравенство не имеет решений:
а) $(a-1)x^2+(a-2)x+a+1<0$; б) $(a+1)x^2-2(a-1)x+3(a-1)>0$?

1466. Сколько общих точек имеют графики функций в зависимости от значений параметра a:
а) $y=|x^2-8|x|-7|$ и $y=a$; б) $y=|x+1|+|x-4|$ и $y=a$;
в) $y=|x+2|-|x-3|$ и $y=a$; г) $y=\dfrac{6}{|x|}$ и $y=a^2-4$?

1467. Найдите все значения параметра m, при которых:
а) наименьшее значение функции $y=x^2-2x+m$ равно наибольшему значению функции $y=-|x|+2-2m$;
б) наибольшее значение функции $y=-x^2-2m+1$ равно наименьшему значению функции $y=|x-2|+|x-4|+m$.

1468. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений имеет единственное решение:

а) $\begin{cases}|x|+|y|=2,\\(x-a)^2+y^2=16;\end{cases}$ б) $\begin{cases}|x|+|y|=2,\\x^2+(y-a)^2=9.\end{cases}$

1469. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений имеет:

а) $\begin{cases}|x|+|y|=2,\\x^2+y^2=a^2\end{cases}$ 4 решения; б) $\begin{cases}|x|+|y|=2,\\y=x^2+a\end{cases}$ 5 решений.

1470. Найдите наибольшее целое значение параметра p, при котором система $\begin{cases} y - x = p, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет два решения.

1471. Решите уравнение $-\log_2(2 - |x - a|) = \log_{0,5}(5 - x)$.

1472. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $(a-1)\log_3^2(x-2) - 2(a+1)\log_3(x-2) + a - 3 = 0$ меньше трёх.

1473. При каких значениях параметра a корни уравнения $4^x + (5-2a)\cdot 4^{\frac{x}{2}} + a + 1 = 0$ принадлежат промежутку $(-1; 2)$?

1474. При каких значениях параметра a имеет решение уравнение $\sin 2x - 2(a+1)(\sin x + \cos x) + 6a - 2 = 0$?

1475. При каких значениях параметра b на отрезке $[-0{,}5\pi; 1{,}5\pi]$ уравнение $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{bx}{2} = 1$ имеет только один корень? Найдите этот корень.

1476. При каких значениях параметра a на промежутке $\left(\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{12}\right)$ уравнение $3\cos^2 4x - (3a+2)\cos 4x + 2a = 0$ имеет: а) только один корень; б) только два корня; в) только три корня?

1477. Найдите все значения параметра m, при каждом из которых уравнение $m^2 + 2m - \sin^2 x - 2m\cos x = 2$ не имеет решений.

1478. Найдите наибольшее значение параметра p, при котором неравенство $2^{x^2-2} + 2^{-x} \geq p$ выполняется для всех действительных значений x.

1479. При каких значениях параметра a для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $4\cos^2 x - 4a\sin x < 10 - a$?

Уровень В

1480. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x-a| + |x+a| = \frac{4}{\pi}\arcsin(x+1)$ имеет единственное решение.

1481. Для всех значений параметра a $(a \geq 0)$ найдите отрицательные корни уравнения $(a^x - 2a)(a^x - 7a) = 6a^2$.

1482. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение $\log_3(9^x + 9b^3) = x$ имеет два различных корня.

1483. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\lg^2 \cos x + 2\lg \cos x - (a^2 + a - 3) = 0$.

1484. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $p\sin^2 x + 2(p+1)\sin x = 1 - p$ на промежутке $[0;\ 0{,}5\pi]$ имеет единственное решение.

1485. Решите уравнение $\sqrt{a^2 - \sin x} = a(\sin x - 1)$.

1486. При каких значениях параметра a на промежутке $[0;\ 0{,}5\pi]$ уравнение $\cos^2 2x + (7a-4)\sin 2x - 10a^2 + 11a - 4 = 0$ имеет: а) только два корня; б) четыре корня?

1487. При всех значениях параметра a решите неравенство $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$.

1488. Решите неравенство $|3^x - 7^x| + 12 \cdot 3^x \geq 7^{x+1} - a \cdot 7^x$.

1489. При каких значениях параметра p произвольное решение неравенства $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 < 0$ является также решением неравенства $\log_2^2 x - (3p-5)\log_2 x - (p+2) < 0$?

1490. При каких значениях параметра a не имеет решений неравенство $(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 + a(\sin^6 x + \cos^6 x) + a + 2 \leq 0$?

1491. При каких значениях параметра a ($a \geq 0$) система уравнений имеет ровно четыре решения:

а) $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ |x - y| + |x + y| = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (|x| - a)^2 + (|y| - a)^2 = 1, \\ |x + y| + |y - x| = 4? \end{cases}$

1492. При каких значениях параметра a система уравнений имеет решения? Найдите эти решения.

а) $\begin{cases} y - x = \dfrac{\pi}{4}, \\ (a-1)\operatorname{tg} x + a\operatorname{tg} y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin(x + 2y) = a^2 + a + 1, \\ \sin(x - 2y) = a^2 - a + 1. \end{cases}$

Упражнения для повторения

1493. Решите уравнение:

а) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$; б) $x^2 + 2|x - 1| - 6 = 0$.

1494. Решите совокупность неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x \leq 3, \\ (x-1)^2 - 2(x+2) > 15 - x. \end{cases}$$

1495. Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, если $A = [-2;\ 6]$, $B = (-4;\ 5)$.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ КОНТРОЛЮ

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Какое наибольшее количество корней может иметь биквадратное уравнение:

а) один; б) два; в) четыре; г) бесконечное множество?

2. Какое из уравнений является однородным:

а) $\sin^2 x + \sin 2x + \cos^2 x = 2$; б) $2^{2x} + 8^x + 3^{2x} = 0$;

в) $\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1} - \sqrt[3]{(x+1)^2} = 0$; г) $\lg^4 x + \lg^2 x - 5 = 0$?

3. Сколько корней имеет уравнение $2^{x-2} = \log_{0,5} x$:

а) один; б) два; в) бесконечное множество; г) ни одного?

4. Найдите корни уравнения $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.

а) $\{1\}$; б) $\{0,1\}$; в) $\{2\}$; г) $\{0,2\}$.

5. При каких значениях параметра a имеет решения уравнение $3\cos x - 4\sin x = a - 3$:

а) $a \in (2;6)$; б) $a \in [-2;8]$; в) $a \in (-\infty;-2] \cup [8;\infty)$; г) $a \in [-3;3]$?

6. Найдите решения системы уравнений $\begin{cases} \lg x + \lg y = 3, \\ \lg x - \lg y = 1. \end{cases}$

а) $(2;1)$; б) $(10;100)$; в) $(-10;100)$; г) $(100;10)$.

7. Найдите корни уравнения $3^x = 4 - x$.

а) $\{1\}$; б) $\{-1\}$; в) $\{0,1\}$; г) уравнение корней не имеет.

8. Найдите сумму целых решений неравенства $\dfrac{(x-5)^2(x^2+2x+1)}{x(x+3)} \le 0$.

а) 2; б) -3; в) -2; г) установить нельзя.

9. Наибольшим целым решением неравенства $\sqrt{2x} + \sqrt{2x+5} \le 5$ является число:

а) 2; б) -2; в) 0; г) 7.

10. При каком наименьшем значении параметра b система уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ x^2 + y^2 = b^2 \end{cases}$ имеет 4 решения:

а) 4; б) $2\sqrt{2}$; в) $\sqrt{2}$; г) -4?

A+B=? ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Решите уравнение $x^4 + x^3 - 9x^2 - 11x + 6 = 0$.

2. При каких значениях параметра a число $x = \frac{\pi}{3}$ является корнем уравнения $2\cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = a^2 - 1$?

3. Решите неравенство $\log_2(x+1) - \log_{0,5}(3x-1) \geq 5$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y = 5, \\ (x-2)(y-1) = 0. \end{cases}$$

5. Сколько корней имеет уравнение $2^{x^2-4x+5} = 1 + \sin^2\frac{\pi x}{4}$? Найдите эти корни.

6. Решите уравнение:

а) $(x^2 - x + 1)^4 + 4x^2(x^2 - x + 1)^2 - 5x^4 = 0$;

б) $\log^2_{0,5}(4x) + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) + 7 = 0$.

7. Найдите сумму целых решений неравенства:

а) $\frac{(x-42)^2\sqrt{x^2-24x+143}}{289-x^2} \geq 0$;

б) $\sqrt{(x-1)(4-x)}\log_{\sin x}(|x+3| + \sqrt{5}) \leq 0$.

8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 9^x - 3^{x+y\log_3 2} + 4^y = 7, \\ 3^x + 2^y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2^{x^2-x-1} = 0,5 \cdot 8^{2x-4}, \\ \log_{1,1}\left(\log_{1,3}\frac{2x-1}{x+1}\right) > 0. \end{cases}$

9. Найдите все значения параметра a, при которых имеет решения уравнение $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-1} = 3$.

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для всех $x \in R$ выполняется неравенство $(a-1)\sin^2 x + a\sin x + 2 > 0$.

Исторические сведения

Древнейшие источники (египетские папирусы и вавилонские глиняные дощечки, греческие и китайские рукописи) свидетельствуют о том, что ещё в давние времена многие задачи решали с помощью уравнений и их систем. Источником уравнений была практика, а также геометрические и абстрактные задачи.

В работе Мухаммеда бен-Мусы ал-Хорезми (IX в.) «Китаб ал-джебр и ал-мукабала» («Книга о восполнении и противопоставлении») подаётся теория линейных и квадратных уравнений, которые исследовались как отдельные математические объекты. Вопросами решения уравнений занимался также Омар Хайям. Он считал, что алгебра — это теория уравнений и чётко отделял алгебру от арифметики.

Способы решения уравнений третьей и четвёртой степени впервые были опубликованы в 1545 г. в книге Дж. Кардано «Великое искусство, или о правилах алгебры». Хотя открытие этих способов не принадлежит Кардано, его работа стала определяющей вехой в развитии алгебры. Он систематизировал методы решения уравнений, подробно рассмотрел различные частные случаи; показал возможность приведения уравнений 3-го и 4-го степеней к виду, не содержащему членов соответственно второй и третьей степени; указал на зависимость между корнями и коэффициентами уравнения, а также на делимость многочлена на выражение $x - a$, где a — корень. Он впервые в Европе допускал отрицательные и мнимые корни, называя их соответственно «фиктивными» и «софистическими».

Основателем символической алгебры считают Ф. Виета, его даже называют отцом буквенной алгебры. Решая уравнения, Виет широко использовал метод подстановки, делал замены, чтобы исключить x^2, $\sqrt{x}$, или чтобы избавиться от дробных коэффициентов.

Ф. Виет открыл одну из важнейших теорем алгебры — о соотношении между корнями и коэффициентами многочлена, разработал метод приближённого решения алгебраических уравнений с числовыми коэффициентами, который применялся до конца XVII в.

У Р. Декарта общий метод решения уравнений заключался в построении их корней как координат специально подобранных алгебраических кривых. Декарт графически решал уравнения третьего, четвёртого, пятого и шестого степеней и указывал, что количество действительных корней совпадает с количеством общих точек кривых.

ГАУСС Карл
(1774—1855)

Запись уравнения, которую теперь принято называть канонической (слева записаны все члены уравнения, а справа — ноль), предложил И. Ньютон. Метод приближённого решения уравнений он описал в «Анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (написано примерно в 1665 г., опубликовано в 1711 г.). И. Ньютон сформулировал основную теорему алгебры о количестве корней уравнения (имея в виду только действительные корни): «Уравнение может иметь столько корней, какова его размерность, но не больше». Доказать эту теорему пытались многие математики.

В 1799 г. К. Гаусс выразил мнение, что существование решений произвольного уравнения в радикалах не является очевидной истиной. П. Руффини в сочинении «Общая теория уравнений ...» (1799 г.) сделал первую попытку доказать неразрешимость в радикалах общего алгебраического уравнения 5-ой степени. Строгое доказательство неразрешимости в радикалах уравнений выше четвёртой степени впервые дал в 1826 г. норвежский математик Н. Абель.

Исследуя вопрос о разрешимости в радикалах общего уравнение пятой степени, Н. Абель выдвинул принцип, который впоследствии стал применяться во всех областях математики: «Вместо того чтобы искать некоторое соотношение, не зная заранее, существует ли оно, следует выяснить, действительно ли существует такое соотношение». Абель в решении проблемы сделал больше, чем П. Руффини, но П. Руффини был первым. Поэтому теорему о неразрешимости в радикалах алгебраического уравнения пятой степени справедливо назвали теоремой Руффини—Абеля.

АБЕЛЬ Нильс
(1802—1829)

Н. Абель не успел полностью завершить свои исследования, а потому не смог дать общий критерий разрешимости уравнений с числовыми коэффициентами в радикалах. Это осуществил французский математик Э. Галуа.

Он не только поставил точку в решении уравнений n-й степени в радикалах,

но и основал новые направления развития алгебры. По этому поводу издатели Галуа писали: «Его мысль была не из тех, от которых отталкиваются, но из тех, к которым ещё нужно дорасти».

ГАЛУА Эварист
(1811—1832)

В XVIII—XIX вв. активно разрабатывалась теория систем алгебраических уравнений со многими неизвестными. Над ней работали Г. Лейбниц, К. Маклорен, Г. Крамер, Ш. Вандермонд, П. Лаплас, К. Гаусс и другие.

Из украинских математиков проблемами современной алгебры занималась Киевская алгебраическая школа, возглавляемая академиком Д. А. Граве (1863—1939). Важные результаты получили О. Ю. Шмидт (1891—1956), Н. Г. Чеботарёв (1894—1947), Б. Н. Делоне (1890—1980), М. Ф. Кравчук (1892—1942), С. Н. Черников (1912—1987).

ГЛАВНОЕ В РАЗДЕЛЕ 5

Равенство с переменными называется *уравнением*, если требуется выяснить, при каких значениях переменных данное равенство верное.

По характеру операций, выполняемых над переменными, различают рациональные (целые, дробные), иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические и другие уравнения.

В общем виде *уравнение с одной переменной* записывают так: $f(x) = g(x)$ или $\varphi(x) = 0$, где $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторые функции от x.

Уравнение может вовсе не иметь решений, иметь единственное решение, несколько решений или бесконечное множество решений. Два уравнения называют *равносильными*, если множества их решений равны.

Уравнение A называют *следствием уравнения* B, если каждое решение уравнения B удовлетворяет и уравнению A. Записывают: $B \Rightarrow A$.

Чтобы решить уравнение, достаточно решить его следствие и из полученного множества решений отбросить те из них, которые данному уравнению не удовлетворяют (*посторонние корни*). Это можно делать проверкой.

Основные **методы решения уравнений:** разложение на множители, замена переменной, функционально-графический (применение свойств функций).

Неравенство с одной переменной в общем виде записывают так:

$f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$,
или $\varphi(x) < 0$, $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) \leq 0$, $\varphi(x) \geq 0$.

Здесь $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторые функции от x.

Два неравенства называют *равносильными*, если множества их решений совпадают. Неравенства, которые не имеют решений, также считают равносильными.

Обобщённый метод интервалов. Чтобы решить этим методом неравенство вида $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), где $f(x)$ — произвольная функция, нужно:

1) найти область определения функции $f(x)$;

2) определить все её нули, то есть решить уравнение $f(x) = 0$;

3) разбить с помощью найденных чисел область определения функции на промежутки знакопостоянства;

4) определить знак функции на каждом из образовавшихся промежутков;

5) записать ответ.

Если задано множество двух и более уравнений с одним или несколькими переменными, для которых нужно найти значения переменной (переменных), удовлетворяющие всем заданным уравнениям, или выяснить, существуют ли такие значения, то говорят, что такое множество уравнений образует *систему уравнений;* обозначают её фигурной скобкой.

Система уравнений, имеющая по крайней мере одно решение, называется *совместимой*. *Система,* множество решений которой пустое, называется *несовместимой.*

Две системы уравнений с n переменными называются *равносильными* на некотором числовом множестве, если их решения на этом множестве равны.

Систему A называют *следствием системы* B, если каждое решение системы B удовлетворяет и системе A. Записывают: $B \Rightarrow A$.

Чтобы решить систему, достаточно решить её следствие и из полученного множества решений отбросить те из них, которые данной системе не удовлетворяют. Это можно делать проверкой.

Основные **методы решения систем уравнений:** метод подстановки, метод линейных преобразований (алгебраического сложения), графический, разложение на множители, замена переменной, применение свойств функций.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

11. б) 5215 грн. **15.** а) $x \geq 0$; г) R. **18.** в) R; г) $[2; \infty)$. **19.** б) $[0; \infty)$; в) R. **25.** а) 10 мин; б) 40 км. **32.** а) 3; б) 1. **33.** а) $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$. **34.** б) $[-3; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4]$. **38.** а) $x + 3$; б) $4 + h$. **41.** б) Наибольшее 107, наименьшее -21. **42.** а) 1) Наибольшее $y(1) = 5 + a$; наименьшее $y(-2) = a - 4$. **45.** б) 5; г) -2 и 3. **53.** а) 2^3; г) 2^{-2}. **55.** а) 4. **59.** а) $x - 1$. **70.** б) $\frac{1}{625}$; г) $\frac{3}{8}$. **71.** б) 0,0625; в) 0,2. **73.** б) $1\frac{1}{9}$. **78.** г) $a\sqrt{b}$. **79.** а) $c + 1$. **80.** а) 5; б) 2,9. **81.** а) 4,7. **105.** г) — возрастающая. **110.** а) 3; б) 0,04. **111.** б) Наибольшее 3, наименьшее $\frac{1}{81}$. **120.** а) $(-2; \infty)$; б) $(1; \infty)$. **124.** Нет. **125.** а) $x = 4$; $x > 4$; $x \leq 4$. **126.** б) $x = 4$; $x \geq 4$; $x < 4$. **128.** б) $x = -1$. **129.** а) $x > 0$. **130.** а) $x \geq 2$; в) решений нет. **131.** а) 1000 м^2. **132.** а) 24 А. **133.** а) $\approx 2{,}6$ г. **146.** а) 2,5. **147.** а) 0,75. **148.** а) 3. **149.** б) 1. **150.** а) 3; $[3; \infty)$; б) -1; $(-1; \infty)$. **152.** а) 3. **153.** а) 0. **154.** а) 1. **155.** а) 0 и 1. **156.** б) 0 и 3. **157.** а) $(-\infty; 5)$. **158.** а) R; в) $(-1; \infty)$. **159.** а) $(-\infty; 0)$. **160.** б) $(-\infty; 1)$. **161.** 1) а) 0 і 1; 2) а) $(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$. **163.** а) -2 и 4. **164.** а) -1; в) 2. **165.** а) 2. **166.** а) 1; д) 1. **167.** а) 3 и 11. **168.** б) 3. **169.** а) 0 и 0,5. **170.** а) $[1{,}25; \infty)$. **171.** а) $(-\infty; 0)$. **172.** а) $(-\infty; 2]$. **173.** а) 8 и -8. **174.** б) 0. **179.** а) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$; г) $(-\infty; -1) \cup [0; \infty)$. **181.** а) R. **182.** а) -2; -1; 0; 1. в) -2; -1; 0; 1; 2. **183.** а) -1; 1; 2. **184.** а) (1;2); в) (0; $-0{,}5$). **185.** а) (2;3) і (3;2); б) (1;3). **186.** 20 мин. **187.** ≈ 7 мин.

202. а) $3^4 = 81$. **204.** а) 3; б) 8. **206.** г) -1; д) 0,5. **207.** а) 25; г) 10. **208.** а) $\log_a 16$; в) $\log_{a+1} 8$. **209.** а) $\log_5 15$. **210.** б) $\lg 8$. **211.** б) 5. **213.** а) 8; в) 1000. **214.** а) $\log_4 5$. **216.** а) -3; б) 6; в) 0,5. **219.** а) -1; б) 1; в) 5. **220.** а) 10; б) 16; в) -13. **221.** а) 0,125; б) 27; в) 0,001. **222.** а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{20}{3}$; в) $\frac{8}{5}$. **223.** а) 10. **224.** а) 9; б) -7. **225.** а) $2p + q + r$. **226.** а) 9. **227.** г) 32; д) 10. **228.** а) 1 и $\log_3 2$. **229.** б) 0 и $\log_5 0{,}5$. **230.** б) $(-3; 3)$. **231.** а) 3. **232.** а) $\log_2 3$. **235.** а) $\frac{5}{2(a-1)}$. **236.** а) $\frac{4}{2b-a}$. **262.** а) $\log_5 30$; д) $\log_7 4$. **264.** а) $(-\infty; -1) \cup (4; \infty)$; б) (2; 3). **265.** а) $(1; \infty)$; б) $(3; \infty)$. **270.** а) $(3; \infty)$; б) (0; 4). **299.** а) 1000; 0,01; в) 4; 8.

300. а) 80. **301.** а) 66. **302.** а) 2; 0,125. **304.** а) 11. **307.** а) (8; 2). **308.** а) (3; 27). **309.** г) 4. **310.** б) 2. **325.** $a \le 1$, $a = 5$. **326.** $b \in (-\infty; -\frac{1}{3}] \cup \{0\} \cup [1; \infty)$. **327.** $a \in (-1; 1) \cup (1; \infty)$; $x = 1$, $x = \log_2(a + 1)$. **329.** $a \in (-\infty; 0) \cup \{12\}$. **331.** б) Если $a < 0$, то неравенство решений не имеет. Если $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$, то $x \in (-\infty; \log_a 3) \cup (\log_a(2a + 1); \infty)$. Если $a = 1$, то $x \in R$. **332.** а) Если $a \in (0; 1)$, то $x \in (3; \frac{3+a}{1-a})$. Если $a \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty)$ — решений нет. б) Если $m \in (0; 1)$, то $x \in (m; 1) \cup (\frac{1}{m}; \infty)$. Если $m > 1$, то $x \in (0; \frac{1}{m}) \cup (1; m)$. Если $m \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$ — решений нет. **337.** а) Если $a < 0$, то $x > \log_2(-2{,}25 : a)$. Если $a > 0$, то $x > -\log_2 a$. Если $a = 0$ — решений нет. **338.** б) Если $a \in (0; 1)$, то $x \in (2; 1 + \sqrt{1+a})$. Если $a > 1$, то $x \in (1 + \sqrt{1+a}; \infty)$. Если $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$ — решений нет. **339.** б) $a < -2$. **340.** а) $a \in [1{,}7; \infty)$. **341.** Если $a \in (0; 2^{\frac{-2}{3}}) \cup (2^{\frac{-2}{3}}; 1) \cup (1; \infty)$, то $x = 2^{\frac{2\log_2 a}{2+3\log_2 a}}$; если $a \in (-\infty; 0] \cup \cup \{2^{\frac{-2}{3}}; 1\}$, то решений нет. **342.** $p \in [-1 - 3\sqrt{2}; -1 + 3\sqrt{2}]$. **343.** $a \in (-\infty; 0)$ — два решения; $a \in [0; \infty]$ — одно решение. **345.** Если $a > 1$, то $x \in (0; a^{-9\frac{1}{7}})$; если $a \le 1$, то решений нет. **347.** Если $a \le 0$, то $x \in R$, если $a > 0$, то $x \in (-\infty; \log_3 \frac{2}{3a}) \cup (\log_3 \frac{1}{a}; \infty)$.

357. а) 2; б) 0,2. **358.** а) 2; б) ∞. **366.** а) 5,5; б) 3. **368.** а) 1; б) 1. **369.** а) 2; б) ∞. **371.** а) 0. **373.** а) -6; б) ∞. **374.** б) 0; в) 0. **375.** а) 0; б) $-0{,}5$. **389.** а) -3; б) 3. **392.** а) 90; б) -7; г) 2. **394.** а) 0,5; в) 0,05. **396.** а) 0,9. **398.** а) $\Delta x = 0{,}2$; $\Delta y = 2$.

405. а) -8; б) 2. **406.** а) $-0{,}5$. **407.** а) 1; б) $-0{,}4$. **409.** а) $-1{,}5$. **417.** Нет; да; 6. **420.** $-10x$. **421.** а) -1; б) $6x$. **423.** б) $2ax$. **426.** а) $-\frac{1}{56}$; б) 1,5. **427.** а) 0,5. **437.** а) 4; в) -2. **438.** а) 0; б) -21. **439.** а) 1; в) 1,5. **440.** а) 0. **441.** а) $-0{,}2$; в) 1. **442.** а) 4; в) 2. **445.** а) 0;

б) 2. **446.** а) 0; б) 1. **448.** а) 0; б) 1. **451.** а) $y = 0$; в) $y = 3$. **452.** а) $y = 0$. **455.** а) 0; б) 2. **456.** а) $\sqrt{5}$; б) 1. **457.** а) $-\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$. **467.** $x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. **469.** $x = 2$ — точка разрыва второго рода. **471.** а) $x = 1$; в) $x = -3$; г) $x = \pm 1$; д) $x = \pm 2$. **475.** а) $x = 1$ — точка разрыва первого рода; б) $x = 0$ — точка разрыва второго рода. **476.** а) $f(0) = -0{,}4$; б) $f(0) = 0{,}75$. **477.** а) $f(0) = 2$; б) $f(0) = 2$. **481.** а) функция непрерывная; б) $x = -2$ — точка разрыва второго рода. **482.** а) $x = 2$ — точка разрыва второго рода; б) $x = 3$ — точка разрыва второго рода; в) $x = -1$— точка разрыва первого рода (неустранимый); г) $x = 1$ — точка разрыва первого рода (неустранимый). **483.** а) $x = 0$ — точка разрыва второго рода; б) $x = 4$ — точка разрыва второго рода; в) $x = 1$ — точка разрыва первого рода (неустранимый); г) $x = 0$ — точка разрыва первого рода (неустранимый). **484.** а) $x = 2$ — точка разрыва первого рода; б) $x = 1$ — точка разрыва первого рода. **486.** а) $f(0) = 1{,}5$. **487.** а) $a = 2$.

501. $k_1 = \sqrt{3}$, $k_2 = 1$. **503.** $y = 3x - 1$. **505.** $k = 0{,}4$. **510.** а) 4; в) -1. **514.** а) $y = 3x - 2$. **515.** (3; 9). **519.** $y'(x) = 2x + 2$, $y'(10) = 22$. **521.** $y'(x) = 2x + 5$. **522.** а) $y' = 6x + 1$; б) $y' = -2x + 5$. **528.** а) 10; б) 75; в) 10; г) 1. **529.** а) $y = 6x + 12$. **531.** (1; 1) або (7; 49). **542.** а) $1{,}5\sqrt{x}$. **544.** а) $-\frac{2}{x^2}$; в) $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$. **545.** а) $\frac{-11}{(5x-3)^2}$; б) $\frac{10x - x^2}{(5-x)^2}$. **551.** а) $y = 4x - 9$; $y = -6x - 4$. **553.** а) $y' = -\frac{2}{x^2} + 3$; б) $y' = \frac{6}{x^3}$. **556.** а) $y' = \frac{2x^2 + 2x + 17}{(2x+1)^2}$. **558.** а) $x = \pm\frac{1}{6}$; в) $x = 0$; $x = 1$. **559.** а) $x \in (-1; 2)$; г) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$. **561.** а) $y = 0{,}09x + 1{,}6$; в) $y = 0{,}89x - 1{,}13$. **562.** а) $x = 0$; $x = \pm 1$. **563.** а) $x = 1$; $x = -2$. **564.** а) $x_0 = 8$, или $x_0 = -14$. **565.** $\frac{25}{12}$. **571.** а) $a = -3$. **583.** а) $y' = \sin x + x\cos x$. **584.** а) $y' = x^2(3\sin x + x\cos x)$. **585.** а) $y' = \frac{2(\sin x - x\cos x)}{\sin^2 x}$. **589.** а) 13. **593.** а) $y = -x + \pi - 1$. **594.** а) $(2\pi n;\ 0)$, $n \in Z$. **595.** а) $\cos x$; г) $-\sin x$.

600. а) $y'=-\sin 2x$; б) $y'=-2\sin 2x$. **605.** а) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

606. б) $x\in\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right), n\in Z$. **609.** а) $y=x+2$. **612.** а) $y=$

$=2\sin x+3$. **613.** 45°. **627.** б) $y'=-7(2-x)^6$; в) $y'=-15x^2(1-x^3)^4$.

628. а) $y'=4\cos 4x$; г) $y'=\frac{3}{4\cos^2\frac{3x}{4}}$. **631.** а) $y'=\sin 2x+2x\cos 2x$.

632. а) $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$; в) $y'=\frac{2x+1}{2\sqrt{(x-1)(x+2)}}$. **633.** а) $\sqrt{3}$. **634.** в) 40;

г) $\frac{7}{12}$. **636.** а) $y=-3x+\frac{3\pi}{4}$; б) $y=\frac{5}{6}x+\frac{4}{3}$. **637.** а) $y'=-2\sin 2x$;

г) $y'=4\sin 32x$. **639.** а) $y'=5\cos 5x$. **640.** а) $y''=6$; б) $y''=12x-6$.

642. а) $y''=-25\sin 5x+2$; б) $y''=-4\cos 2x$. **644.** а) $y'=\cos x\cos 2x-$

$-2\sin x\sin 2x$. **645.** а) $y'=4\sin^3 x\cos x$; в) $y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

647. а) -21; в) $\frac{3}{16}$. **648.** а) -2π; в) $-\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}}{2}$. **649.** а) $y=12x+1-\frac{\pi}{2}$.

652. $S=3\frac{1}{8}$. **653.** $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$. **654.** $a=-\frac{7\sqrt{7}}{8}$; $b=\frac{27}{4}$.

656. а) $y^{(IV)}=-4\cos x+x\sin x$. **657.** а) $y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

675. а) $2e$; б) $1-\ln\sqrt{2}$. **677.** а) $y=2x\ln 2+2-\ln 4$; б) $y=1-x$.

678. а) $y=\frac{2x}{e}$. **682.** а) $y'=-e^{-x}+2xe$; в) $y'=e^{x+\sin x}(1+\cos x)$.

683. а) $y'=4e^x(e^x+2)^3$; б) $y'=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$. **684.** а) $y'=\frac{6e^{3x}}{(1-e^{3x})^3}$;

в) $y'=\frac{1-2e^{-x}+xe^{-x}}{\sqrt{1-2e^{-x}}}$; г) $y'=\frac{6\ln^2(2x+1)}{2x+1}$; д) $y'=\frac{1-\ln 4x}{x^2}$.

685. а) $y'=\frac{9}{3x-4}$; б) $y'=\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}$. **686.** а) $y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-5}$. **689.** а) $e^{-1,5}$; б) 1. **690.** а) 15°; б) 60°. **691.** $y=2x+1$. **692.** $y=0,5ex$. **696.** а) 0; б) 4,5.

707. а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$. **717.** а) Убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$; возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; \infty)$; б) возрастает на $\left(-\infty; -3\frac{1}{3}\right]$ и $[0; \infty)$; убывает на $\left[-3\frac{1}{3}; 0\right]$. **723.** а) Возрастает на $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$; б) возрастает на $(-\infty; 0)$; убывает на $(0; \infty)$. **724.** в) убывает на $(-\infty; -1]$; возрастает на $[-1; \infty)$. **725.** а) возрастает на $\left[-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$; убывает на $\left[\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$. **729.** а) возрастает на $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \pi n\right)$ и $\left(\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$; убывает на $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$; $n\in Z$. **731.** а) $a\geq 0$; б) $a\geq 2$. **732.** а) $a\leq -\frac{1}{3}$. **744.** а) $-0,5$. **745.** а) $x=0$; б) $x=-0,5$. **746.** а) $x_{max}=-1$; $x_{min}=0$. **748.** а) $x_{max}=-1$, $y_{max}=7$; $x_{min}=1$, $y_{min}=3$. **771.** а) $a\in(-\infty; -14)\cup(13; \infty)$ — один корень; $a=-14$ и $a=13$ — два корня; $a\in(-14; 13)$ — три корня; в) $a\in(-\infty; -77)\cup(31; \infty)$ — один корень; $a=-77$ и $a=31$ – два корня; $a\in(-77; 31)$ — три корня. **785.** а) Вогнутая, если $x\in(-\infty; -0,5)$ и $x\in(0,5; \infty)$; выпуклая, если $x\in(-0,5; 0,5)$; $x=\pm 0,5$ — точки перегиба. **786.** а) $x\in\left(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ и $x\in\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \infty\right)$ — вогнутая, $x\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ — выпуклая; $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ — точки перегиба. **787.** а) $x=0$ — вертикальная асимптота; $y=x$ — наклонная асимптота. **788.** б) $x=\pm 1$ — вертикальные

асимптоты; $y = 0$ — горизонтальная асимптота. **791.** а) вогнутая, если $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (0; \infty)$; выпуклая, если $x \in (-1; 0)$; $x = -1$ — точка перегиба. **794.** а) $x = \pm\sqrt{3}$ — вертикальные асимптоты; $y = -x$ — наклонная асимптота.

811. 1. **812.** −0,5. **814.** 1200 м. **817.** б) 1) $\sqrt{20}$; 0. **818.** а) 1) 5; 4. **819.** а) Нет. **820.** а) $[-2; \infty)$. **822.** Квадрат. **824.** $4\frac{2}{7}$ ч. **825.** 60°. **826.** 4 × 4 × 2 (м). **828.** $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ (кв. ед.). **829.** 18 и 3. **830.** ≈ 2,57 м. **831.** ≈ 20 лет, ≈ 5,5 л. **833.** $(0{,}5; 0{,}5\sqrt{2})$. **836.** $a = 0{,}5$, $a = 2 + \sqrt{2}$. **844.** а) 10 м/с. **847.** а) $v(t) = 8t + 3$; б) $a(t) = 8$. **849.** а) 16 м/с и 42 м/с^2. **850.** 1 с. **851.** Через $6\frac{2}{3}$ с. **852.** 4 град/с. **855.** а) 4 м/с и 2 м/с. **856.** а) 36 м/с^2. **858.** а) 40 м/с; в) 180 м. **859.** $t \approx 4{,}1$ с; $h \approx 82$ м. **861.** 1А. **862.** $t = 9$ с. **863.** $1\frac{1}{12}$ г/ч. **866.** 3π рад/с. **867.** $\frac{4t}{\sqrt{25 - 4t^2}}$ м/с. **895.** а) $\varnothing$; б) $[1; 3]$. **896.** $(-1; 0) \cup [4; 5]$.

910. $\left(x^4\right)' = 4x^3$; да. **912.** $\left(0{,}5x^2 + x\right)' = 0{,}5 \cdot 2x + 1 = x + 1$. **913.** $0{,}5x^2 + x + C$. **916.** б) При каждом $n \in N$ на промежутке $(\pi n; \pi(n + 1))$ функция ctg x определена и дифференцирована, причём $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. **918.** а) Да; в) нет, ибо в точке $x = 0 \in [-3; 3]$, функция не определена. **925.** а) $-x^5 + 4$. **926.** а) $f(x) = 2$. **934.** а) $3x + 0{,}5x^2 + C$; в) $x^3 + 2{,}5x^2 + C$. **935.** в) $\frac{1}{4}x^4 + e^x + C$. **936.** а) $\frac{1}{4}x^4 + x^2 - x + C$; в) $2x + \frac{1}{3}\sin 3x + C$. **937.** а) $15x^4$. **938.** а) $x + \frac{x^3}{3} + 21$. **939.** а) $0{,}25x^4 + 1{,}75$. **944.** а) $\frac{1}{x} + C$; в) $4x + \frac{1}{x} + C$. **945.** а) $4\sqrt{x} + C$; в) $2{,}7\operatorname{tg} x + C$; **946.** а) $\operatorname{tg} x - \cos x + C$.

947. а) $-\frac{5}{28}\cos 14x + C$. **948.** в) $\frac{1}{4}\sin 4x + C$. **954.** $f(x) = x + 0{,}5e^{2x} +$ $+ 2{,}5$. **957.** а) $x(t) = t^3 + t + 3$. Сначала покажите, что $v(t) = 3t^2 + 1$. **971.** а) $8\frac{2}{3}$. **972.** а) 1. **973.** а) 6. **974.** а) $\pi + 4$. **975.** а) 6,4. **976.** Один из способов — по формуле площади трапеции; её основания 4 и 6, а высота 4. **977.** а) 0,25. **980.** $10\frac{2}{3}$. **996.** а) 5. **997.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **998.** а) $\frac{2}{3}$.

1000. а) 2. **1003.** а) $e - 1$; в) $12 + \ln 81$. **1004.** а) $\frac{1}{3}\ln 7$; г) 4,5. **1007.** а) $\frac{4}{3}$. **1008.** а) 4,5; в) 4,25. **1009.** а) $\frac{3}{\ln 2} - 2$. **1011.** Так. **1015.** а) 6; г) 12. **1023.** 117π (куб. ед.). **1026.** 198 м. **1031.** 0,125 Дж. **1032.** 0,784 Дж. **1033.** ≈ 1800 Н. **1046.** 2 : 1. **1047.** $ke_1e_2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$. **1048.** Если M – масса Земли, то $\frac{kMm}{R^2} = mg$, отсюда $kM = gR^2$ и $A = \int\limits_R^{R+h} \frac{kMm}{x^2}dx = \frac{gmRh}{R+h}$. **1056.** а) Если $y = 4e^{3x}$, то $y' = 3 \cdot 4e^{3x} = 3y$. **1057.** а) Да; б) нет; в) нет. **1058.** $y = e^x + 2$. **1060.** $y = 2e^x$. **1061.** $y = 0{,}5e^{2x}$. **1062.** Да. **1067.** а) $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 - 5\right)$. **1068.** а) $y = Ce^{3x}$. **1073.** $S(3) \approx 76$ м, $S(8) \approx 6$ м. **1074.** ≈ 545 суток. **1075.** 0,005. **1076.** $t\ln 2 : \ln\frac{m}{n}$. **1085.** б) {3; 6; 9}. **1088.** д) 3 628 800. **1089.** а) $(n + 1)!$. **1091.** 18. **1092.** 24. **1093.** 12. **1095.** 120. **1097.** 20 160. **1102.** а) 30240. **1105.** а) 8. **1107.** 27. **1109.** 24. **1112.** 240. **1114.** а) 24. **1116.** 14. **1129.** 2520. **1130.** 6. **1131.** 18. **1133.** 30 240. **1134.** б) 1. **1143.** а) 648; б) 4536. **1144.** 60. **1145.** 60. **1146.** 20. **1147.** 950 400. **1148.** $P_{15} \cdot P_6$. **1152.** а) 10. **1153.** 28. **1163.** 190. **1164.** 496. **1167.** C_{20}^4, A_{20}^4. **1169.** 28. **1170.** а) $0{,}5n(n-1)$; б) C_n^3. **1171.** 35. **1172.** 201376; 31465. **1174.** а) $x^4 + 4x^3c + 6x^2c^2 +$

$+4xc^3+c^4$. **1183.** в) 9. **1185.** $C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7$. **1187.** а) Шансы равны. **1189.** 685. **1192.** 15368. **1193.** а) 211876. **1194.** $C_{10}^2 \cdot C_7^2 = 945$. **1195.** а) 4. **1196.** 5882.

1203. Мода 32, медиана 31,5. **1204.** 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4 — вариационный ряд, 3 — его размах, 1 — мода, 2 — медиана. **1205.** а) Частота 3, относительная частота 0,05; б) в 3 раза. **1206.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 13 — вариацонный ряд. **1207.** Размах — 4, мода — 3, медиана — 3. **1213.** а) 50,5. **1214.** $4\frac{1}{3}$, 5 и 4,5. **1215.** 34,8 мин. **1216.** 528 г. **1217.** Да. **1218.** 2,7 %. **1219.** $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$; $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$. **1220.** Средние квадратичные $\sqrt{0{,}116}$, $\sqrt{0{,}142}$, $\sqrt{0{,}134}$. Лучше задание выполнил первый. **1258.** а) $\frac{1}{6}$. **1264.** а) $\frac{54}{125}$, б) $\frac{36}{125}$, в) $\frac{8}{125}$. **1265.** а) 0,3; б) 0,2. **1270.** $\frac{1}{24}$. **1271.** $\frac{1}{1296}$. **1272.** $\frac{1}{24}$. **1273.** $\frac{1}{2520}$. **1274.** а) $\frac{1}{60}$; б) $\frac{1}{10}$. **1276.** $\frac{5}{9}$. **1277.** а) $\frac{60}{253}$; б) $\frac{15}{253}$. **1278.** $\frac{1}{330}$. **1279.** а) $\frac{33}{59}$; б) $\frac{45}{118}$. **1280.** 0,78. **1281.** а) 0,2; б) 0,2. **1282.** а) $C_{14}^4 : C_{20}^{10} = \frac{7}{1292}$; б) $C_6^2 \cdot C_{14}^8 : C_{20}^{10} = \frac{315}{1292}$. **1283.** а) $C_m^2 : C_{m+n}^2$; б) $mn : C_{m+n}^2$. **1284.** а) $\frac{5}{9}$. **1286.** а) 3 числа из 49; б) равные вероятности, ибо $C_{15}^7 = C_{15}^8$. **1287.** 0,5. **1288.** $\frac{1}{27}$. **1289.** 0,5. **1290.** $\frac{2}{n-1}$. **1291.** $\frac{1}{15}$. **1292.** $\frac{1}{720}$. **1293.** а) $\frac{18}{35}$; б) $\frac{1}{35}$. **1294.** $\frac{2}{9}$ або $\frac{4}{9}$. **1299.** 0,511.

1300. Почти такие же. **1302.** $M(\xi) = 3{,}5$. **1303.** $\frac{1}{6}$. **1304.** $M(\xi) = 4{,}5$. **1305.** В последней клетке должно быть $\frac{1}{4}$, ибо

$1-4\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$. $M(\xi)=3\frac{5}{6}$. **1306.** $M(\xi)=-350$ (грн).

Выигрыш	0	1	20	100
Количество	939	50	10	1

1307. $M(\varphi)=2{,}5$; $D(\varphi)\approx 2{,}92$. Такая случайная величина соответствует, например, выпаданию очков при кидании правильного игрального кубика. **1311.** Область определения — множество натуральных чисел, меньших чем 7. Область определения $\{1; 6; 15; 20\}$. **1321.** а) $-2; -1; 1$. **1322.** а) 2. **1323.** а) $2\pm\sqrt{3}$. **1325.** б) -1. **1328.** а) $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$. **1330.** а) $0{,}5(\sqrt{5}-1)$ и $-0{,}5(\sqrt{5}+1)$. **1331.** а) $-4\pm\sqrt{5}$. **1332.** в) $-2, 3\pm\sqrt{3}$ и 8. **1333.** а) 2 и 3; б) -1. **1334.** а) 1 и $-0{,}5(3\pm\sqrt{5})$. **1335.** а) 0,5 и 3,5; г) $-1; 1; -4$ и 4. **1360.** а) 1. **1361.** а) 12. **1365.** б) $(-\infty; -2)\cup(0; \infty)$. **1372.** б) $(-\infty; -1)\cup$ $\cup(7; \infty)$. **1377.** а) $(-3; -2]\cup(0; 6]$. **1378.** в) $\left\{-1; \frac{2}{3}\right\}\cup[2; \infty)$. **1380.** а) $(-\infty; -3)\cup(-2; 0)$. **1381.** а) $(-\infty; -1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2}; \infty)$. **1384.** а) $(0; 2)$. **1389.** а) $(4; \infty)$. **1391.** а) $(-\sqrt{3}-1; -2)\cup(\sqrt{3}-1; 1)$; б) $(-\infty; -3)\cup\left(\frac{5-\sqrt{33}}{2}; 2\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{33}}{2}; \infty\right)$. **1392.** а) $(-\infty; 1)\cup(3; \infty)$.

1445. а) Если $a>4$, то $x\in(4; a)$; если $a=4$, то $x\in\varnothing$; если $a<4$, то $x\in[a; 4)$; г) если $a>2$, то $x\in[a; \infty)\cup\{2\}$; если $a=2$, то $x\in(2; \infty)$; если $a<2$, то $x\in[a; \infty)$. **1446.** 1; 0; 4. **1448.** а) $b>2$; б) $a\in(-1; 2)$. **1450.** $a\in\varnothing$. **1451.** а) $(-2; 6)$. **1453.** а) Если $a<0$ — корней нет; если $a=0$ — два корня; если $a\in(0; 4)$ — 4 корня, при $a=4$ — три корня; если $a>4$ — два корня. **1454.** б) 2; в) ±5; ±3. **1459.** $p\in(0; 1)$. **1460.** Если $a<3$, то $x\in(-\infty; a]\cup[3; \infty)$; если $a>3$, то $x\in(-\infty; 3]\cup[a; \infty)$; если $a=3$, то $x\in R$. **1461.** $m=1$. **1463.** ±3. **1464.** $(-2; 4)$. **1465.** а) $a>\frac{2\sqrt{7}-2}{3}$; б) $a<-2$. **1467.** а) $m=1$. **1468.** б) $\pm5, \pm1$. **1469.** а) $\pm\sqrt{2}, \pm2$; б) -2. **1470.** $p=1$. **1478.** $p=1$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Анализ математический 91
Аргумент функции 9
Асимптота вертикальная 125
— горизонтальная 117
— наклонная 183
Бином Ньютона 287
Варианта 294
Вариационный ряд 294
Величина случайная 324
Вероятность классическая 314
— статистическая 323
Выборка 293
Выпуклость графика функции 182
Геометрический смысл производной 200
Гистограмма 301
Дисперсия 295
Дифференциальное исчисление 91
Дифференцирование 135
Значения функции 100
—— наибольшие 193
—— наименьшие 193
—— экстремальные 174
Интеграл 223
— определенный 241
— неопределенный 223
Интегральная сумма 240
Интегрирование 221
Исследование функции 176, 186
Касательная 131
— к графику функции 131
Комбинаторика 271
Комбинаторные задачи 272
Комбинации 285
Криволинейная трапеция 233
Критические точки функции 168
——— второго рода 182
Логарифм 49
— десятичный 52
— натуральный 52
Максимум функции 174
Математическое ожидание 324
Мгновенная скорость 200
Медиана выборки 294
Метод интервалов 208
—— обобщённый 350
Минимум функции 174
Множество бесконечное 271
— упорядоченное 272
— конечное 271
— пустое 271
Мода выборки 294
Наибольшее значение функции 193
Наименьшее значение функции 193
Нахождение первообразных 228
Непрерывность функции 105
Неравенство логарифмическое 69
— показательное 41
Область значений функции 9
— определения функции 9
Общий вид первообразных 222
Объединение множеств 272
Окрестность точки 116
Основное логарифмическое тождество 50
Первообразная 221
Переменная интегрирования 241
Пересечение множеств 271
Перестановки 280
Период функции 10
Подграфик функции 234
Подмножество 271
Полигон 302
Последовательность 91
Правило нахождения первообразных 228
— произведения 273
— суммы 272
Предел последовательности 93
— функции 101
Пределы интегрирования 241
Признак возрастания функции 168
— максимума функции 175
— минимума функции 175
— убывания функции 168
Применение интегралов 250
Прирост аргумента 103
— функции 103
Производная 134

— как скорость 200
— логарифмической функции 161
— показательной функции 161
— постоянной функции 135
— сложной функции 154
— степенной функции 143
— тригонометрических функций 148
— функции в точке 134
Перестановки 280
Промежутки возрастания функции 168
— знакопостоянства 10
— убывания функции 168
Работа переменной силы 251
Размещения 280
Распределение вероятностей 325
— нормальное 327
Свойства логарифмов 50
— логарифмической функции 60
— показательной функции 30
— степеней 20
Событие достоверное 312
— невозможное 312
— случайное 312
— элементарное 313
Среднее гармоническое 296
— геометрическое 296
— значение выборки 294
— квадратичное 295
Статистика 293
— математическая 294
Степень числа 19
—— с действительным показателем 19
—— с иррациональным показателем 19
—— с рациональным показателем 19
—— с целым показателем 19
Стохастика 323
Теорема Вейерштрасса 123
— Больцано—Коши 122
— о площади подграфика 234
— о производной косинуса 149
— о производной произведения 142
— о производной синуса 148
— о производной степени 143
— о производной суммы 141
— о производной частного 142
— о равносильности уравнений 338
Точка максимума 173
— минимума 173
— перегиба 182
— экстремума 174
Точка разрыва 123
—— второго рода 124
—— первого рода 124
Треугольник Паскаля 287
Угловой коэффициент 133
Уравнение алгебраическое
— дифференциальное 258
— касательной 135
— логарифмическое 67
— показательное 38
Ускорение 202
Факториал 274
Формула Ньютона—Лейбница 241
Формулы дифференцирования 218
Функции взаимно обратные 59
Функция 9
— возрастающая 11
— дифференцируемая в точке 135
— — на промежутке 135
— логарифмическая 58
— непрерывная в точке 104
— — на промежутке 105
— нечётная 10
— периодическая 10
— подинтегральная 241
— показательная 30
— рациональная 12
— сложная 154
— степенная 21
— убывающая 11
— чётная 10
— элементарная 105
Центральные тенденции выборки 295
Частота 294
Частотная таблица 294
Число e 31
Экспонента 32
Экстремум функции 173
Элемент множества 271

Права авторів та видавничі права ДСВ «Освіта» захищені Законом України «Про авторське право і суміжні права» від 23.12.1993 р. (зі змінами від 11.07.2001 р.).

Друковане копіювання книги або її частини, будь-які інші контрафактні видання тягнуть за собою відповідальність згідно зі ст. 52 цього Закону.

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Підручник для 11 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням російською мовою

Академічний рівень,
профільний рівень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Переклад з української

Редактор *І. В. Луценко*
Художній редактор *М. Ю. Крюченко*
Технічний редактор *Ц. Б. Федосіхіна*
Комп'ютерна верстка *І. А. Чурікової*
Коректори *Н. Г. Сніцарук, Л. В. Липницька*

Підписано до друку 31.05.2011. Формат 60×90 1/16. Папір офс.
Гарнітура Шкільна. Друк офс. Ум. друк. арк. 25 + 0,25 форзац.
Обл.-вид. арк. 25 + 0,45 форзац.
Тираж 44 053 пр. Вид. № 37483. Зам. № 11-0135

Видавництво «Освіта», 04053, Київ, вул. Юрія Коцюбинського, 5.
Свідоцтво ДК № 27 від 31. 03. 2000 р.

Віддруковано з готових діапозитивів
ТОВ «Побутелектротехніка»
Свідоцтво ДК № 3179 від 08.05.2008 р.
61024, м. Харків, вул. Ольмінського, 17.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Производная

Если $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$.

$C' = 0$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$(Cu)' = Cu'$, $(\sin x)' = \cos x$, $(e^x)' = e^x$,

$(u+v)' = u'+v'$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(a^x)' = a^x \ln a$,

$(uv)' = u'v + uv'$, $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Если $y = f(u)$, где $u = h(x)$, то $y' = y'_u u'$.

Первообразная

$f(x)$	k (постоянная)	x^n $(n \neq -1)$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	e^x	a^x
$F(x)+C$	$kx+C$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$2\sqrt{x}+C$	e^x+C	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$

$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$f(ax+b)$, $a \neq 0$
$F(x)+C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\dfrac{1}{a} F(ax+b)+C$

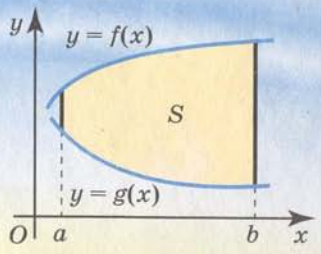
Формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

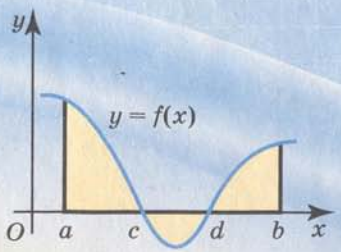
Свойства интеграла

1) $\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$;

2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, $k \in R$; 3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c \in [a,b]$.



$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$



$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Комбинаторика

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$,

$P_n = n!$ — количество перестановок,

$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ — количество размещений,

$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$,

$C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ — количество комбинаций,

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Основные свойства комбинаций

1. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

2. $C_m^{n+1} = \dfrac{m-n}{n+1}\, C_m^n$.

3. $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$.

4. $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m$.

Формула бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^n b^n.$$

Общий член разложения бинома $(a+b)^n$

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}b^k$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n}$ — вероятность

27,00

Государственное специализированное издательство «Освіта»

Тел. (044) **486-58-02**
486-93-46
Тел./факс (044) **486-98-15**
486-93-21

www. osvitapublish.com.ua
E-mail: osvita@kv.ukrtel.net

ISBN 978-966-04-0838-8